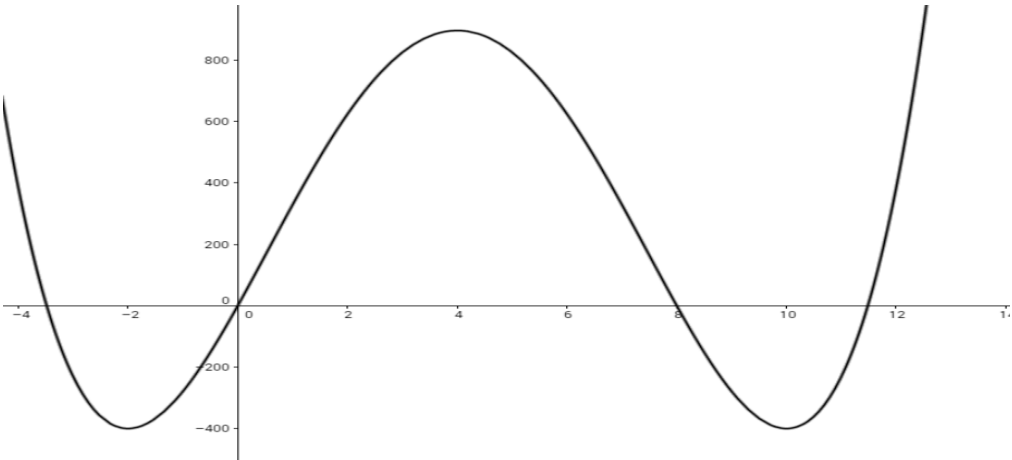
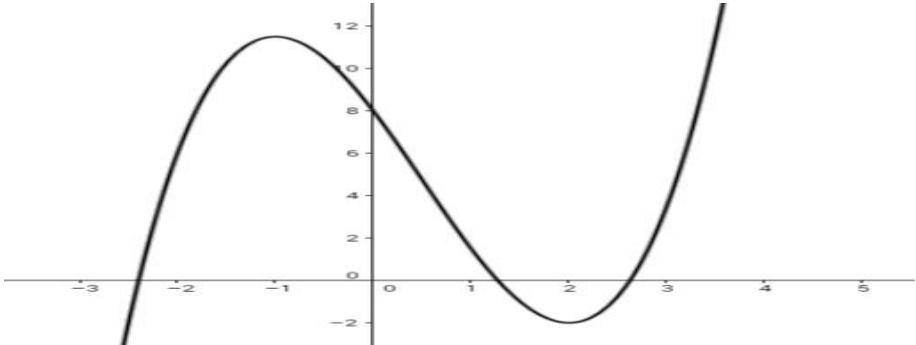


Lösungen zu Aufgaben zur Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen:

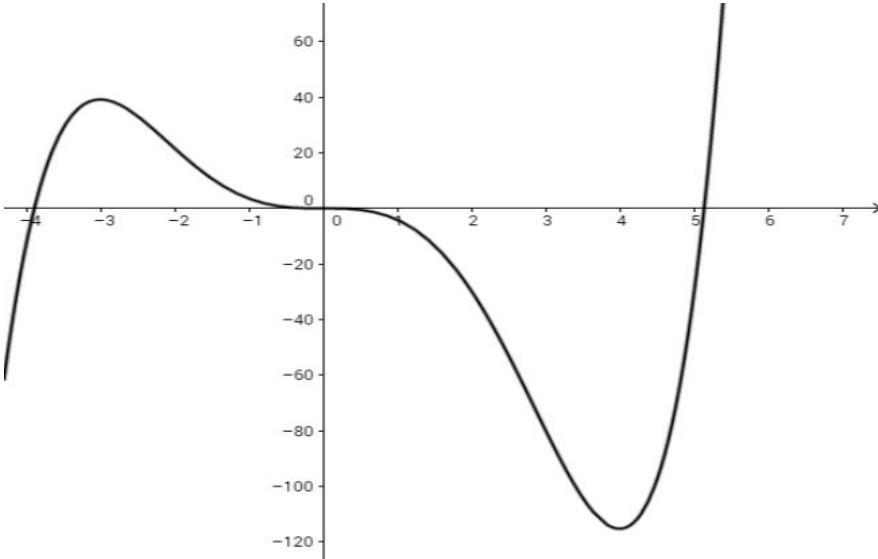
1. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$f(x) = x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 320x$		
Nullstellen Schnittpunkt mit der y-Achse	$x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 320x = 0$ $x \cdot (x^3 - 16x^2 + 24x + 320) = 0$ $x = 0 \vee 4x^3 - 16x^2 + 24x + 320 = 0$ $x = 0 \vee x \approx -3,48 \vee x = 8 \vee x \approx 11,48$ (TR oder Polynomdivision) $f(0) = 0$	$x = 0$ $x \approx -3,48$ $x = 8$ $x \approx 11,48$ $S_y (0/0)$
Symmetrie	$f(-x) = x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 320x \neq f(x)$, also keine Achsensymmetrie $f(-x) = x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 320x \neq -f(x) = -x^4 + 16x^3 - 24x^2 - 320x$, also keine Punktsymmetrie oder keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie

Extrema	$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320$ $f''(x) = 12x^2 - 96x + 48$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = 0$ $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$ (TR oder Polynomdivision) $f''(-2) = 336$, d.h. Minimum $f''(4) = -912$, d.h. Maximum $f''(10) = 288$, d.h. Minimum $f(-2) = -400 \quad f(4) = 896 \quad f(10) = -400$	Minimum $(-2/-400)$ Maximum $(4/896)$ Minimum $(10/-400)$
Wendepunkte	$f''(x) = 12x^2 - 96x + 48$ $f'''(x) = 24x - 96$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 48 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{12} (\approx 7,46) \vee x = 4 - \sqrt{12} (\approx 0,54)$ (TR oder p-q-Formel) $f'''(4 + \sqrt{12}) \approx 83,14$, d.h. Wendepunkt und minimale Steigung $f'''(4 - \sqrt{12}) \approx -83,14$, d.h. Wendepunkt und maximale Steigung $f(4 + \sqrt{12}) \approx 176$ und $f(4 - \sqrt{12}) \approx 387,9$	$W_1 (4 + \sqrt{12} / \approx 176)$ $W_2 (4 - \sqrt{12} / \approx 387,98)$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, denn es handelt sich um eine Funktion vierten Grades, die vor x^4 eine positive Zahl (nämlich 1) hat.	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

Monotonie	$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$ $f(-3) = -364 < 0$ Man wählt eine Zahl im Intervall $[-2; 4]$, z.B. $x = 0$: $f'(0) = 320 > 0$, d.h. $f'(x) > 0$ im Intervall $[-2; 4]$ Man wählt eine Zahl im Intervall $[4; 10]$, z.B. $x = 5$: $f'(5) = -140 < 0$, d.h. $f'(x) < 0$ im Intervall $[4; 10]$ $f'(12) = 896$	f ist monoton steigend für $x \in [-2; 4]$ und $x > 10$ f ist monoton fallend für $x \in [4; 10]$ und $x < -2$
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 12x^2 - 96x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{12} \vee x = 4 - \sqrt{12}$ Man wählt eine Zahl im Intervall $[4 - \sqrt{12}, 4 + \sqrt{12}]$, z.B. $x = 4$: $f''(4) = -144$ (Man kann noch ausrechnen: $f(-1) > 0$ und $f(10) > 0$, dies ist aber nicht unbedingt notwendig, da es sich um einfache Nullstellen handelt. Dies gilt im Übrigen auch für die Berechnung der Monotonie.)	f ist rechtsgekrümmt für $x \in [4 - \sqrt{12}, 4 + \sqrt{12}]$, ansonsten linksgekrümmt.

2. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$g(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 8$		
Nullstellen Achsenschnittpunkt mit der y-Achse	$x^3 - 1,5x^2 - 6x + 8 = 0$ $x \approx -2,4 \vee x \approx 1,27 \vee x \approx 2,62$ (mit TR) $f(0) = 8$	$x \approx 2,4 \vee x \approx 1,27$ $\vee x \approx 2,62$ $S_y(0/8)$
Symmetrie	$f(-x) = -x^3 - 1,5x^2 + 6x + 8 \neq f(x)$, also keine Achsensymmetrie $f(-x) = -x^3 - 1,5x^2 + 6x + 8 \neq -f(x) = -x^3 + 1,5x^2 + 6x - 8$, also keine Punktsymmetrie oder keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie
Extrema	$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ $f''(x) = 6x - 3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$ (TR oder p-q-Formel) $f''(2) = 9$, d.h. Minimum	Minimum (2/-2) Maximum (-1/11,5)

	$f''(-1) = -9$, d.h. Maximum $f(2) = -2 \quad f(-1) = 11,5$	
Wendepunkte	$f''(x) = 6x - 3$ $f'''(x) = 6$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ $f'''(2) = 6 > 0$, d.h. Wendepunkt und minimale Steigung $f(2) = -2$	$W(2/-2)$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, denn es handelt sich um eine Funktion dritten Grades, die vor x^3 eine positive Zahl (nämlich 1) hat.	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
Monotonie	$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$ Man wählt eine Zahl im Intervall $[-1; 2]$, z.B. $x = 0$: $f'(0) = -6 < 0$ $(f(-2) > 0 \text{ und } f(3) > 0 \text{ kann man noch ausrechnen})$	f ist im Intervall $[-1; 2]$ monoton fallend, ansonsten monoton steigend
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Man wählt eine Zahl, die kleiner als 2 und eine, die größer als 2 ist, z.B.: $f''(0) = -3$ und $f''(3) = 15$	f ist rechtsgekrümmt für $x < 2$ und linksgekrümmt für $x > 2$.

3. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$h(x) = 0,2x^5 - 0,25x^4 - 4x^3$		
Nullstellen Achsenschnittpunkt mit der y-Achse	$0,2x^5 - 0,25x^4 - 4x^3 = 0$ $x^3 \cdot (0,2x^2 - 0,25x - 4) = 0$ (p-q-Formel oder TR) $x = 0 \vee x \approx -3,89 \vee x \approx 5,14$ $f(0) = 0$	$x = 0 \vee x \approx -3,89$ $\vee x \approx 5,14$ $S_y(0/0)$
Symmetrie	$f(-x) = -0,2x^5 - 0,25x^4 + 4x^3 \neq f(x) = +0,2x^5 - 0,25x^4 - 4x^3$, also keine Achsensymmetrie $f(-x) = -0,2x^5 - 0,25x^4 + 4x^3 \neq -f(x) = -0,2x^5 + 0,25x^4 - 4x^3$, also keine Punktsymmetrie oder keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie

Extrema	$f'(x) = x^4 - x^3 - 12x^2$ $f''(x) = 3x^3 - 3x^2 - 24x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 12x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - x - 12) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4$ (TR oder p-q-Formel) $f''(3) = -18$, d.h. Maximum $f''(4) = 72$, d.h. Minimum $f(-3) = 39,15$ $f(4) = -115,2$ $f''(0) = 0$ Sonderfall! Untersuchung auf VZW bei f' : $f'(-1) = -10$ und $f'(1) = -12$  d.h. kein VZW, also kein Extrema	Minimum $(4/-115,2)$ Maximum $(-3/39,15)$
Wendepunkte	$f''(x) = 3x^3 - 3x^2 - 24x$ $f'''(x) = 9x^2 - 6x - 24$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 24x = 0$ $\Leftrightarrow x \cdot (3x^2 - 3x - 24) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -2,37 \vee x \approx 3,37$ $f'''(0) = -24 < 0$, d.h. Wendepunkt und maximale Steigung $f'''(-2,37) \approx 40,77 > 0$, d.h. Wendepunkt mit minimaler Steigung $f'''(3,37) \approx 57,99 > 0$, d.h. Wendepunkt mit minimaler Steigung $f(0) = 0$ $f(-2,37) \approx 30,41$ $f(3,37) \approx -98,4$	$W_1(0/0)$ $W_2(-2,37/30,41)$ $W_3(3,37/-98,4)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, denn es handelt sich um eine Funktion fünften Grades, die vor x^5 eine positive Zahl (nämlich 0,2) hat.	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
Monotonie	$f'(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4$ Man wählt eine Zahl $x < -3$, z.B. $x = -4$: $f'(-4) = 128 > 0$ $\Rightarrow f$ ist monoton steigend für $x < -3$ Man wählt eine Zahl im Intervall $[-3; 0]$, z.B. $x = -1$: $f'(-1) = -10 < 0$ $\Rightarrow f$ ist monoton fallend im Intervall $[-3; 0]$ Man wählt eine Zahl im Intervall $[0; 4]$, z.B. $x = 1$: $f'(1) = -12 < 0$ $\Rightarrow f$ ist monoton fallend im Intervall $[0; 4]$ Man wählt eine Zahl $x > 4$, z.B. $x = 5$: $f'(5) = 200 > 0$ $\Rightarrow f$ ist monoton steigend für $x > 4$	f ist monoton steigend für $x < -3$ f ist monoton fallend im Intervall $[-3; 0]$ f ist monoton fallend im Intervall $[0; 4]$ f ist monoton steigend für $x > 4$
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 3x^3 - 3x^2 - 24x = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -2,37 \vee x \approx 3,37$ Man wählt eine Zahl $x < -2,37$, z.B. $x = -3$: $f''(-3) = -36$ $\Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt Man wählt eine Zahl im Intervall $[-2,37; 0]$, z.B. $x = -1$: $f''(-1) = -18$ $\Rightarrow f$ ist linksgekrümmt Man wählt eine Zahl $x > 3,37$, z.B. $x = 4$: $f''(4) = 72$ $\Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt	f ist rechtsgekrümmt für $x < -2,37$ und $x > 3,37$ f ist linksgekrümmt für $x \in [-2,37; 0]$