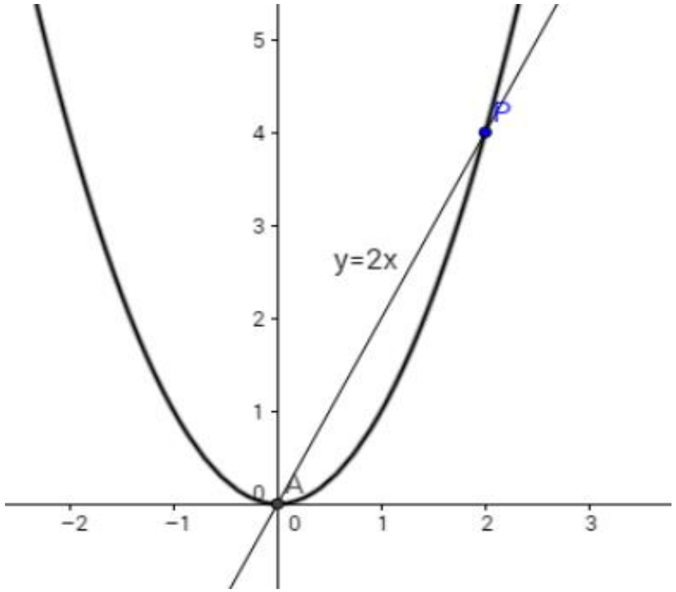
Die Steigung eines Graphen und der Begriff der Ableitung

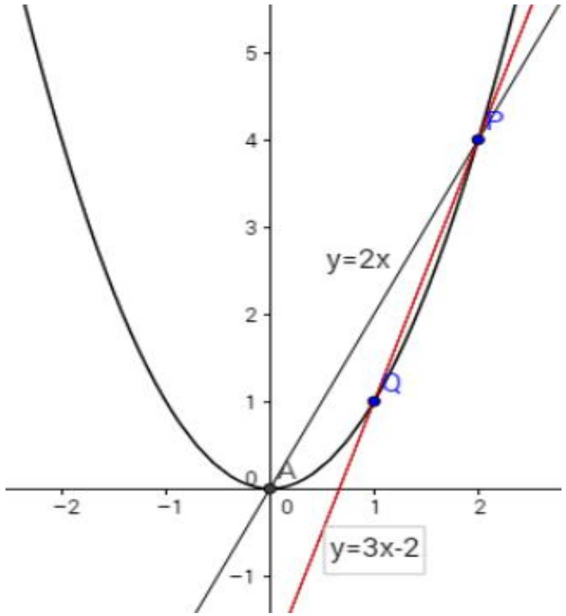
Man kann bisher nur die Steigung von linearen Funktionen berechnen, wie sieht es aber mit der Steigung von anderen Graphen aus?

Als Beispiel schauen wir uns f(x) = x² im Punkt P(2/4) an und versuchen die Steigung des Graphen im Punkt P mit Hilfe von Geradensteigungen herzuleiten:

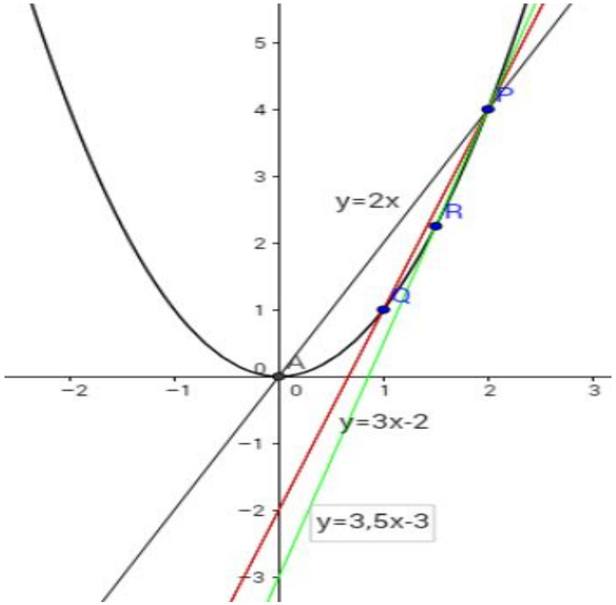
1. Schritt: Man berechnet z.B. die Steigung der Geraden, die durch P und (0/0) geht: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4-0}{2-0}$. Sie ist **2**!

2. Schritt: Man berechnet z.B. die Steigung der Geraden, die durch P und Q(1/1) geht: Sie ist **3**!

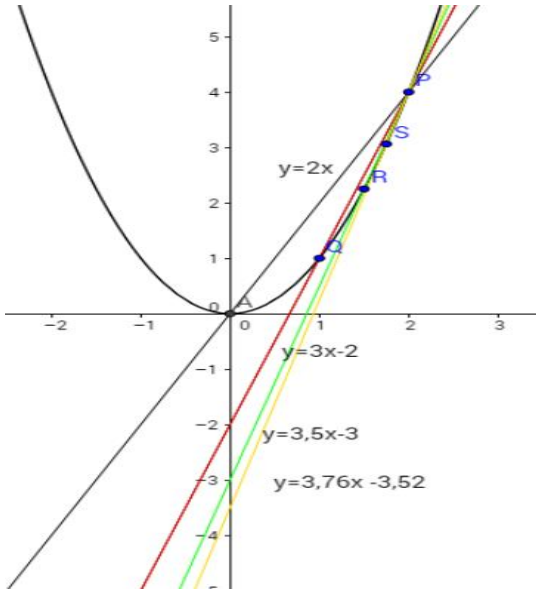




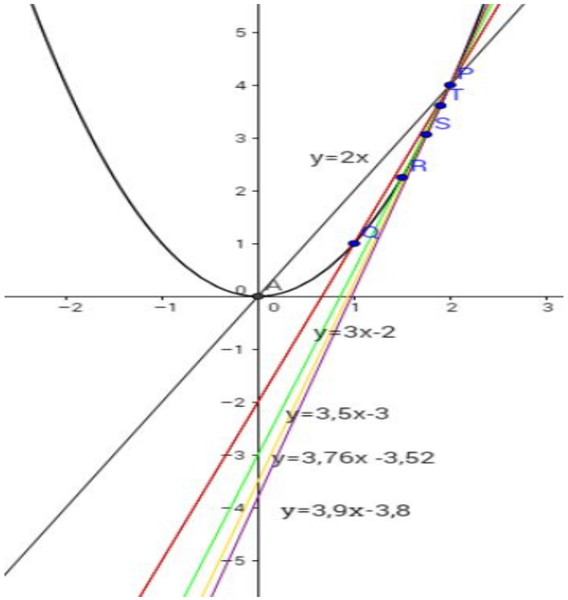
3. Schritt: Man berechnet die Steigung der Geraden, die durch P und R (1,5/2,25) geht: Sie ist **3,5**!



4. Schritt: Man berechnet die Steigung der Geraden, die durch P und S(1,75/3,06) geht: Sie ist **3,76**!

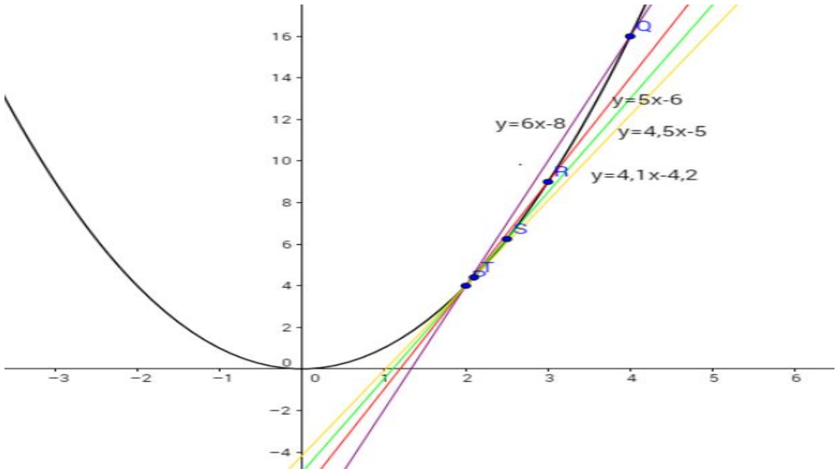


5. Schritt: Man berechnet die Steigung der Geraden, die durch P und T (1,9/3,61) geht: Sie ist **3,9**!



6. Schritt: Man berechnet die Steigung von weiteren Geraden, die durch P und einen zweiten Punkt gehen, der sich immer mehr an P annähert! Man erkennt, dass sich der Wert immer mehr der **4** annähert!

7. Schritt: Man wiederholt das Ganze, indem man sich dem Punkt P von rechts annähert: Man erkennt, dass sich auch hier der Wert immer mehr der **4** annähert!



Da der Näherungswert von links und der Näherungswert von rechts gleich 4 sind, setzt man fest, dass der Graph von f(x) im Punkt P die Steigung 4 hat.

Mathematisch gesprochen: $\lim\limits_{h \to +0} \frac{f(2)-f(2-h)}{h} = \lim\limits_{h \to +0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$ **oder** $\lim\limits_{h \to \pm 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$.

Man nennt 4 die Ableitung von f im Punkt P(2/4) und kürzt dies ab als: f´(2) = 4.

Man berechnet die Ableitung/Steigung von f in einem beliebigen Punkt $P(x_0/f(x_0))$ anlog:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Graphisch berechnet man die Steigung einer Geraden, die f nur im Punkt P berührt, also die Steigung einer Tangente.