Lösungen zu Funktionenscharen der e-Funktion

Aufgabe	Rechenweg	Ergebnis
$f_a(x) = ax^2 \cdot e^{x+a}$, $a \neq 0$	**Nullstellen:** $f_a(x) = ax^2 \cdot e^{x+a} = 0$ $\Leftrightarrow ax^2 = 0 \quad \vee\ e^{x+a} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = 0 \qquad (e^{x+a} \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = 0$ **Extrema:** $f'_a(x) = 2ax \cdot e^{x+a} + ax^2 \cdot e^{x+a} \cdot 1 = e^{x+a} \cdot (ax^2 + 2ax)$ $f''_a(x) = (2ax + 2a) \cdot e^{x+a} + (ax^2 + 2ax) \cdot e^{x+a} \cdot 1 = e^{ax} \cdot (2ax + 2a + ax^2 + 2ax)$ $= e^{x+a} \cdot (ax^2 + 4ax + 2a)$ $f'_a(x) = e^{x+a} \cdot (ax^2 + 2ax) = 0$ $\Leftrightarrow ax^2 + 2ax = 0 \qquad \vee\ e^{x+a} = 0$ $\Leftrightarrow x \cdot (ax + 2a) = 0 \qquad (e^{x+a} \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee ax = -2a /:a$ (geht, da $a \neq 0$) $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$ $f_a''(0) = e^a \cdot 2a = \begin{cases} a > 0: e^a \cdot 2a > 0 => \text{Minimum} \\ a < 0 \ \ e^a \cdot 2a < 0 => \text{Maximum} \end{cases}$ $f_a(0) = 0$ $f_a''(-2) = e^{a-2} \cdot (4a - 8a + 2a) = e^{a-2} \cdot (-2a) =$ $\begin{cases} a > 0: e^{a-2} \cdot (-2a) < 0 => \text{Maximum} \\ a < 0 \ \ e^{a-2} \cdot (-2a) > 0 => \text{Minimum} \end{cases}$ $f_a(-2) = 4a \cdot e^{a-2}$	Nullstelle: $x = 0$ $a > 0$: Minimum (0/0) Maximum $(-2/4a \cdot e^{a-2})$ $a < 0$: Maximum (0/0) Minimum $(-2/4a \cdot e^{a-2})$

Wendepunkte:

$f''_a(x) = e^{x+a} \cdot (ax^2 + 4ax + 2a)$

$f'''_a(x) = (2ax + 4a) \cdot e^{x+a} + (ax^2 + 4ax + 2a) \cdot e^{x+a} \cdot 1 = e^{x+a} \cdot (2ax + 4a + ax^2 + 4ax + 2a)$

$= e^{x+a} \cdot (ax^2 + 6ax + 6a)$

$f''_a(x) = e^{x+a} \cdot (ax^2 + 4ax + 2a) = 0$

$\Leftrightarrow ax^2 + 4ax + 2a = 0 /:a$ (geht, da $a \neq 0$) $\vee\ e^{x+a} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$ $(e^{x+a} \neq 0)$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 2} = -2 \pm \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$ und $x_2 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$

$f_a'''(-0{,}59) \approx e^{-0{,}59+a} \cdot (0{,}34a - 3{,}54a + 6a) = e^{-0{,}59+a} \cdot 2{,}8a \neq 0$ da $a \neq 0$

=> Wendepunkt [genauer: $e^{-0{,}59+a} \cdot 2{,}8a < 0$ für $a < 0$, d.h. maximale Steigung

$e^{-0{,}59+a} \cdot 2{,}8a > 0$ für $a > 0$, d.h. minimale Steigung]

$f_a'''(-3{,}41) \approx e^{-3{,}41+a} \cdot (11{,}66a - 20{,}46a + 6a) = e^{-3{,}41+a} \cdot (-2{,}8)a \neq 0$ da $a \neq 0$

=> Wendepunkt [genauer: $e^{-3{,}41+a} \cdot (-2{,}8)a < 0$ für $a > 0$, d.h. maximale Steigung

$e^{-3{,}41+a} \cdot (-2{,}8a) > 0$ für $a < 0$, d.h. minimale Steigung]

$f_a(-2+\sqrt{2}) = a\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{a-2+\sqrt{2}} \approx 0{,}34a \cdot e^{a-0{,}59}$

$f_a(-2-\sqrt{2}) = a\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{a-2-\sqrt{2}} \approx 11{,}66a \cdot e^{a-3{,}41}$

$a > 0$: $\lim\limits_{x\to\infty}[\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{ax^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{e^{x+a}}] = \infty$ $\quad a < 0$: $\lim\limits_{x\to\infty}[\underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{ax^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{e^{x+a}}] = -\infty$

$a > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{ax^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{e^{x+a}}] = 0$ $\quad a < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{ax^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{e^{x+a}}] = 0$

Wendepunkte:

$W_1(\approx -0{,}59 \;/ \approx 0{,}34a \cdot e^{a-0{,}59})$

$W_2(\approx -3{,}41 / \approx 11{,}66a \cdot e^{a-3{,}41})$

$\lim\limits_{x\to\infty}[ax^2 \cdot e^{x+a}]$

$= \begin{cases} \infty \text{ für } a > 0 \\ -\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[ax^2 \cdot e^{x+a}]$

$= \begin{cases} 0 \text{ für } a > 0 \\ 0 \text{ für } a < 0 \end{cases}$

$f_a(x) = (2ax + 4) \cdot e^{ax}$ $a \neq 0$	**Nullstellen:** $f_a(x) = (2ax + 4) \cdot e^{ax} = 0$ $\Leftrightarrow 2ax + 4 = 0 \quad \vee\ e^{ax} = 0$ $\Leftrightarrow 2ax = -4 \qquad (e^{ax} \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = -\frac{2}{a}$ (existiert, da $a \neq 0$) **Extrema:** $f'_a(x) = 2a \cdot e^{ax} + (2ax + 4) \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax} \cdot (2a + 2a^2x + 4a) = e^{ax} \cdot (2a^2x + 6a)$ $f''_a(x) = 2a^2 \cdot e^{ax} + (2a^2x + 6a) \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax} \cdot (2a^2 + 2a^3x + 6a^2) = e^{ax} \cdot (2a^3x + 8a^2)$ $f'_a(x) = e^{ax} \cdot (2a^2x + 6a) = 0$ $\Leftrightarrow 2a^2x + 6a = 0 \quad \vee\ e^{ax} = 0$ $\Leftrightarrow 2a^2x = -6a \qquad (e^{ax} \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{a}$ (existiert, da $a \neq 0$) $f''(-\frac{3}{a}) = e^{-3} \cdot (2a^3 \cdot (-\frac{3}{a}) + 8a^2) = e^{-3} \cdot (-6a^2 + 8a^2) = e^{-3} \cdot 2a^2 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(-\frac{3}{a}) = (2a \cdot (-\frac{3}{a}) + 4) \cdot e^{-3} = -2 \cdot e^{-3} \approx -0{,}0996$ **Wendepunkte:** $f''_a(x) = e^{ax} \cdot (2a^3x + 8a^2)$ $f'''_a(x) = 2a^3 \cdot e^{ax} + (2a^3x + 8a^2) \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax} \cdot (2a^3 + 2a^4x + 8a^3) = e^{ax} \cdot (2a^4x + 10a^3)$ $f''_a(x) = e^{ax} \cdot (2a^3x + 8a^2) = 0$ $\Leftrightarrow 2a^3x + 8a^2 = 0 \quad \vee\ e^{ax} = 0$ $\Leftrightarrow 2a^3x = -8a^2 \qquad (e^{ax} \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{a}$ (existiert, da $a \neq 0$)	Nullstelle: $x = -\frac{2}{a}$ Minimum$(-\frac{3}{a}/-2 \cdot e^{-3})$ Wendepunkt$(-\frac{4}{a}/2 \cdot e^{-4})$

$f'''(-\frac{4}{a}) = e^{-4} \cdot (2a^4 \cdot (-\frac{4}{a}) + 10a^3) = e^{-4} \cdot 2a^3 \neq 0$ da $a \neq 0$ => Wendepunkt

[genauer: $e^{-4} \cdot 2a^3 < 0$ für $a < 0$, d.h. maximale Steigung

$e^{-4} \cdot 2a^3 > 0$ für $a > 0$, d.h. minimale Steigung]

$f(-\frac{4}{a}) = (2a \cdot (-\frac{4}{a}) + 4) \cdot e^{-4} = 2 \cdot e^{-3} \approx 0{,}0996$

$a > 0$: $\lim\limits_{x\to\infty}[\underbrace{(2ax + 4)}_{\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{\infty}] = \infty$

$a < 0$: $\lim\limits_{x\to\infty}[\underbrace{(2ax + 4)}_{-\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{0}] = 0$

(da die e-Funktion den Verlauf bestimmt)

$a > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\underbrace{(2ax + 4)}_{-\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{0}] = 0$

$a < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\underbrace{(2ax + 4)}_{\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{\infty}] = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}[(2ax + 4) \cdot e^{ax}]$

$= \begin{cases} \infty \text{ für } a > 0 \\ 0 \text{ für } a < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[(2ax + 4) \cdot e^{ax}]$

$= \begin{cases} 0 \text{ für } a > 0 \\ \infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$

$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} - x$	**Extrema:** $f_a'(x) = e^{ax} - 1$ $f_a''(x) = a \cdot e^{ax}$ $f_a'(x) = e^{ax} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{ax} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{ax}) = \ln(1) \Leftrightarrow ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f_a''(0) = a \cdot e^{0} = a = \begin{cases} > 0 \text{ für } a > 0 => Minimum \\ < 0 \text{ für } a < 0 => Maximum \end{cases}$ $f_a(0) = \frac{1}{a}$ Wendepunkte: $f_a''(x) = a \cdot e^{ax} = 0$ ergibt keine Lösung, da $e^{ax} \neq 0$ => kein Wendepunkt $a > 0$: $\lim\limits_{x\to\infty}[\underbrace{\frac{1}{a} \cdot e^{ax}}_{\infty} \underbrace{- x}_{-\infty}] = \infty$ $a < 0$: $\lim\limits_{x\to\infty}[\underbrace{\frac{1}{a} \cdot e^{ax}}_{0} \underbrace{- x}_{-\infty}] = 0$ (da die e-Funktion den Verlauf bestimmt) $a > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\underbrace{\frac{1}{a} \cdot e^{ax}}_{0} \underbrace{- x}_{\infty}] = 0$ $a < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\underbrace{\frac{1}{a} \cdot e^{ax}}_{\infty} \underbrace{- x}_{\infty}] = \infty$	a > 0: Minimum $(0/ \frac{1}{a})$ a < 0: Maximum $(0/ \frac{1}{a})$ kein Wendepunkt $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{a} \cdot e^{ax} - x]$ $= \begin{cases} \infty \text{ für } a > 0 \\ 0 \text{ für } a < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{a} \cdot e^{ax} - x]$ $= \begin{cases} 0 \text{ für } a > 0 \\ \infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$