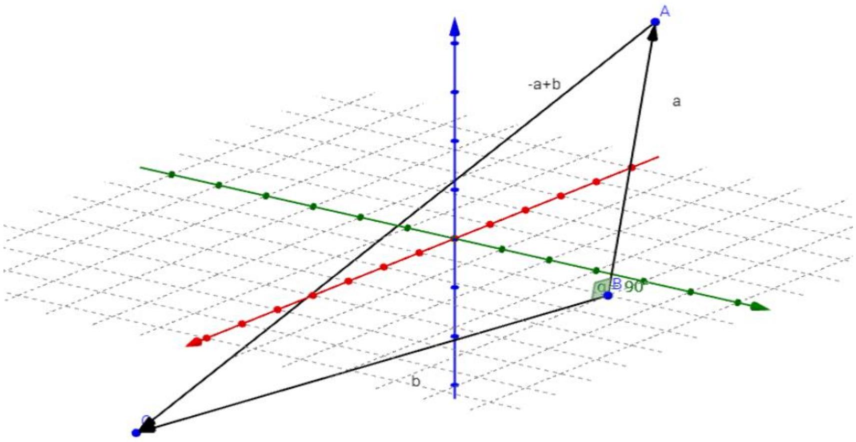
Orthogonalität von Vektoren

Wann stehen zwei Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ senkrecht aufeinander?



Ein Dreieck ist rechtwinklig **genau dann ,wenn** $a^2 + b^2 = c^2$, also:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind rechtwinklig zueinander genau dann, wenn

$$|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = \left|-\vec{a} + \vec{b}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} -a_1 + b_1 \\ -\,a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\boldsymbol{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\,\right)^2 + \left(\sqrt{\boldsymbol{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,\right)^2 = \left(\sqrt{\boldsymbol{(-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 + (-a_3 + b_3)^2}}\,\right)^2$$

Wurzel und Quadrat heben sich auf

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 + (-a_3 + b_3)^2}$$

2. binomische Formel anwenden

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2)}$$

a_1^2, a_2^2, a_3^2 und b_1^2, b_2^2, b_3^2 auf beiden Seiten abziehen

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \boldsymbol{-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3}$$ **durch (-2) teilen**

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal genau dann, wenn

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

Man definiert den Term $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ als das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Damit gilt der Satz: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal genau dann, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.