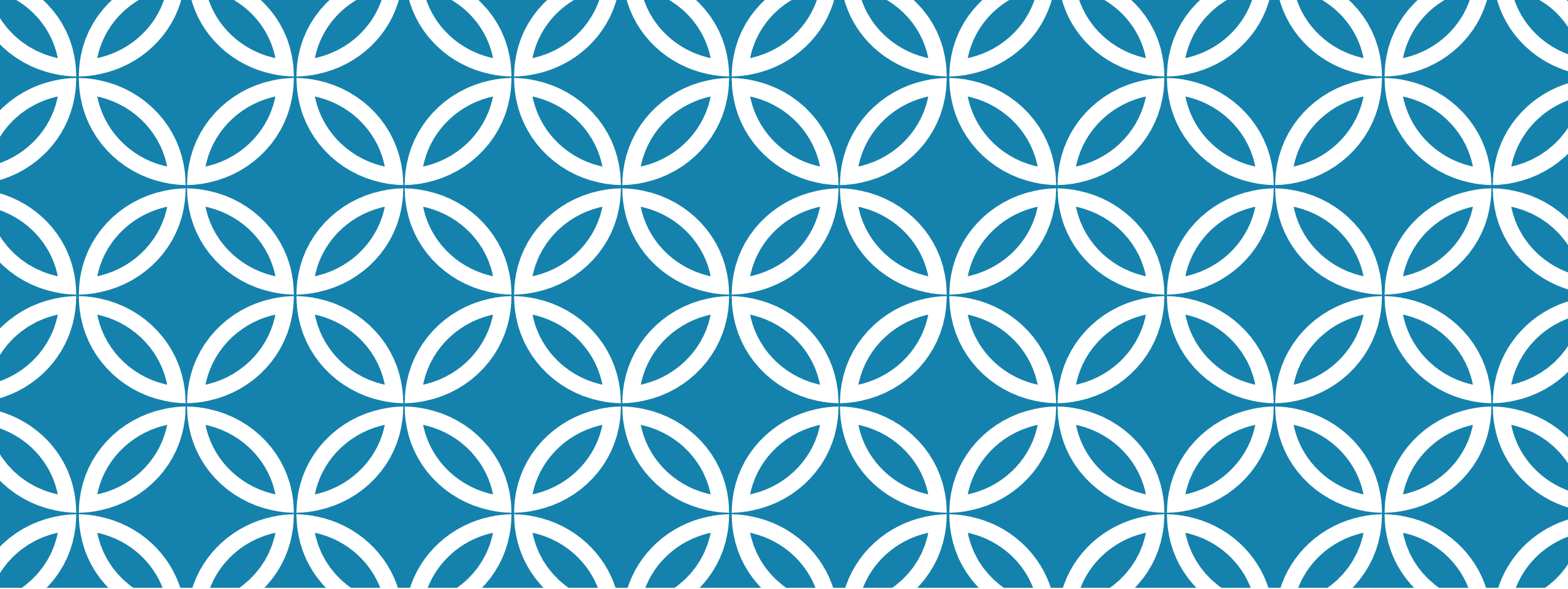




LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN

matheportal.wordpress.com

DEFINITION

Die Vektoren $\overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n-1}}, \dots, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_0}$, sind linear unabhängig, wenn gilt:

$$\overrightarrow{0} = r_n \cdot \overrightarrow{a_n} + r_{n-1} \cdot \overrightarrow{a_{n-1}} + \dots + r_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + r_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + r_0 \cdot \overrightarrow{a_0}$$

$$\Leftrightarrow r_n = r_{n-1} = \dots = r_2 = r_1 = r_0 = 0$$

BERECHNUNG BEI 2 VEKTOREN

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ sind **linear abhängig**,

$$\text{denn } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ bzw. } 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 = 4r \\ 2 = 4r \\ 3 = 6r \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0,5 = r \\ 0,5 = r \\ 0,5 = r \end{vmatrix} \checkmark,$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind **linear unabhängig**, denn:

Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 = 4r \\ 2 = 4r \\ 3 = 3r \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0,5 = r \\ 0,5 = r \\ 1 = r \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht parallel

BERECHNUNG BEI 3 LINEAR ABHÄNGIGEN VEKTOREN

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind **linear abhängig**

Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = 2r - 2s + 4t \\ 0 = 2r + s - 0,5t \\ 0 = 3r + 3s - 3t \end{array} \begin{array}{l} I \cdot (-3) \\ II \cdot 3 \\ III \cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = 6r + 3s - 1,5t \\ 0 = 6r + 6s - 6t \end{array} \begin{array}{l} I \\ I + II \\ I + III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = 9s - 13,5t \\ 0 = 12s - 18t \end{array} \begin{array}{l} I \\ II \cdot (-4) \\ III \cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = -36s + 54t \\ 0 = 36s - 54t \end{array} \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = -36s + 54t \\ 0 = 0 \end{array} \begin{array}{l} I \\ II \\ I + III \end{array}$$

$\Rightarrow \infty$ – viele Lösungen

$\Rightarrow$ Hier gibt es z.B. mit $t = 1$, $s = 1,5$ und $r = -0,5$ eine von $(0,0,0)$ verschiedene Lösung.

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind linear abhängig.

BERECHNUNG BEI 3 LINEAR UNABHÄNGIGEN VEKTOREN

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind **linear unabhängig**.

Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2r - 2s + 4t & I \cdot (-3) \\ 0 = 2r + s - 0,5t & II \cdot 3 \\ 0 = 3r + 5s - 3t & III \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -6r + 6s - 12t & I \\ 0 = 6r + 3s - 1,5t & II + I \\ 0 = 6r + 10s - 6t & III + I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -6r + 6s - 12t & I \\ 0 = 9s - 13,5t & II \cdot (-16) \\ 0 = 16s - 18t & III \cdot 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -6r + 6s - 12t & I \\ 0 = -144s + 216t & II \\ 0 = 144s - 162t & III + II \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = -144s + 121,5t \\ 0 = 54t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = -144s + 121,5t \\ 0 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -6r + 6s - 12t \\ 0 = s \\ 0 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = t \\ 0 = s \\ 0 = t \end{cases}$$

=> Die Vektoren sind linear unabhängig.