# Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

**allgemeine Definition:**

Die Vektoren $\overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n-1}}, \dots, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_0}$, sind linear unabhängig, wenn gilt:

$$\vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{r_n} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a_n}} + \boldsymbol{r_{n-1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a_{n-1}}} + \dots + \boldsymbol{r_2} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a_2}} + \boldsymbol{r_1} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a_1}} + \boldsymbol{r_0} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a_0}} \Leftrightarrow \boldsymbol{r_n} = \boldsymbol{r_{n-1}} = \dots = \boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_0} = \mathbf{0}$$

$(r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, r_1, r_0 \in \mathbb{R})$

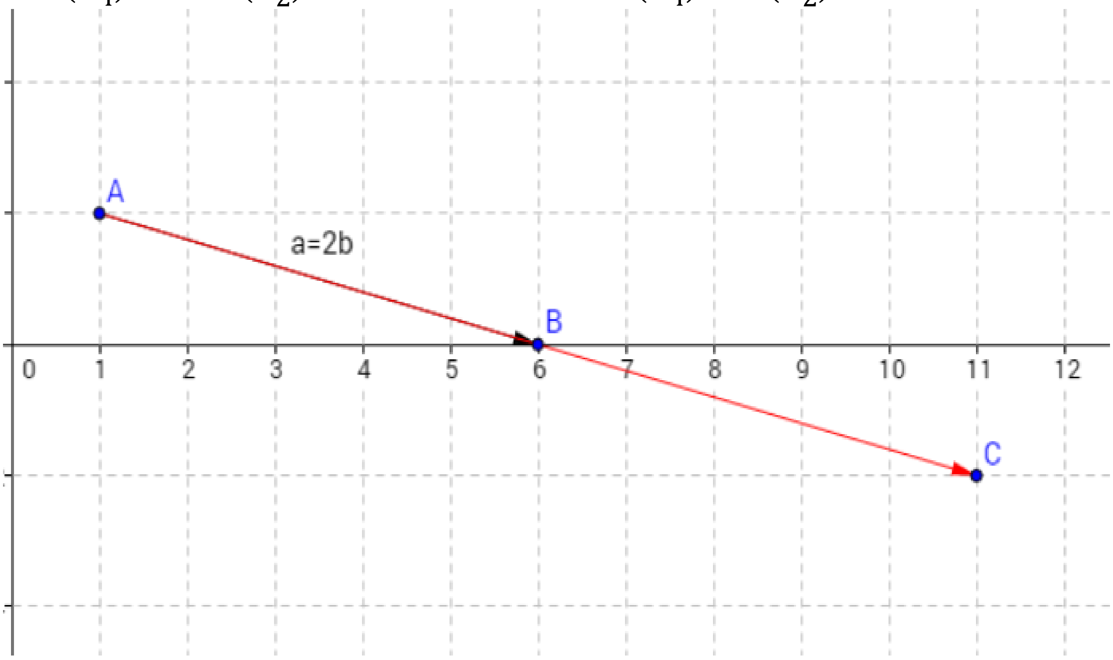
**praktische Anwendung:**

## 1. im zweidimensionalen Raum

a. $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ sind **linear abhängig**, wenn eine reelle Zahl r existiert, sodass $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn $\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$




**Rechenweg**: $\begin{vmatrix} 10 = r \cdot 5 \\ -4 = r \cdot (-2) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} r = 2 \\ r = 2 \end{vmatrix} \surd$, also linear abhängig

b. $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ sind **linear unabhängig**, wenn keine reelle Zahl r existiert, sodass $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn $\begin{matrix} 10 = 2 \cdot 5 \\ -4 = 0{,}5 \cdot (-8) \end{matrix}$ d.h. es existiert keine Zahl r, sodass $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$

Rechenweg: $\begin{vmatrix} 10 = r \cdot 5 \\ -4 = r \cdot (-8) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} r = 2 \\ r = 0{,}5 \end{vmatrix} f$, also linear unabhängig

## 2. im dreidimensionalen Raum

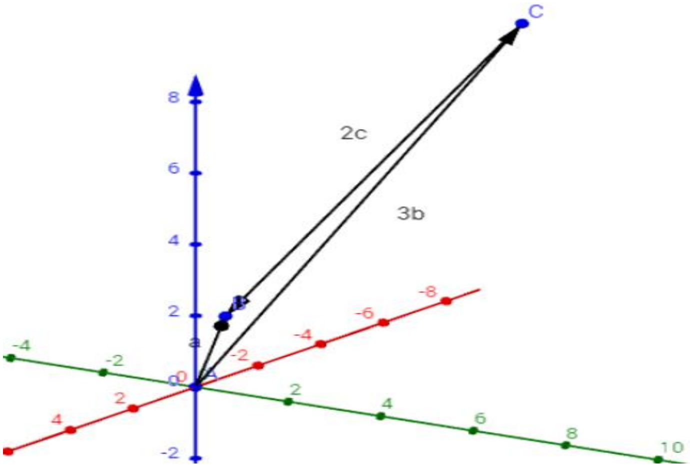
a. $\vec{a}$ $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **linear abhängig**, wenn reelle Zahlen r und s existieren, sodass $\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

(analog: $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ sind **linear abhängig**, wenn eine reelle Zahlen r und s existieren, sodass $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$)

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$$




**Rechenweg:**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Man löst 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$\left| \begin{matrix} 2 = -2r + 4s \\ 2 = 1r - 0{,}5s \\ 3 = 3r - 3s \end{matrix} \right| \Rightarrow 2r = 4s - 2 \Leftrightarrow r = 2s - 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} r = 2s - 1 \\ 2 = 1 \cdot (2s - 1) - 0{,}5s \\ 3 = 3r - 3s \end{matrix} \right| \Rightarrow 2 = 2s - 1 - 0{,}5s \Leftrightarrow 3 = 1{,}5s \Leftrightarrow s = 2$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} r = 2 \cdot 2 - 1 \\ s = 2 \\ 3 = 3r - 3s \end{matrix} \right| \Rightarrow r = 4 - 1 = 3$$

2. Man überprüft die beiden Lösungen in der 3. Gleichung:

$3 = 3r - 3s$

$3 = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3 = 9 - 6$ $\surd$, also linear abhängig

$b.\ \vec{a}\ und\ \vec{b}$ sind **linear unabhängig**, wenn keine reelle Zahlen r und s existieren, sodass

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \ \cdot \vec{c}$

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $und\ \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

**Rechenweg:**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Man löst 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{c} 2 = -2r + 4s \\ 2 = 1r - 0{,}5s \\ 3 = 5r - 3s \end{array} \right| \Rightarrow 2r = 4s - 2 \Leftrightarrow r = 2s - 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} r = 2s - 1 \\ 2 = 1 \cdot (2s - 1) - 0{,}5s \\ 3 = 5r - 3s \end{array} \right| \Rightarrow 2 = 2s - 1 - 0{,}5s \Leftrightarrow 3 = 1{,}5s \Leftrightarrow s = 2$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} r = 2 \cdot 2 - 1 \\ s = 2 \\ 3 = 5r - 3s \end{array} \right| \Rightarrow r = 4 - 1 = 3$$

2. Man überprüft die beiden Lösungen in der 3. Gleichung:

$3 = 3r - 3s$

$3 = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3 = 15 - 6\ f$, also linear unabhängig