

Lage von Geraden und Ebenen in Parameterform:

1. Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt:

Gegeben ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a. Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad / - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / -s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} / -t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. Das lineare Gleichungssystem mit 3 Unbekannten lösen:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2r + 2s - t = -1 \\ -5r - s - t = 3 \\ 5r + 3s + 3t = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow r = -1, s = 1, t = 1 \text{ (mit TR oder Gaussverfahren)}$$

c. Den Wert in die Gerade einsetzen (oder die beiden Werte in die Ebene):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow g \text{ und } E \text{ schneiden sich im Punkt } P(0/3/-4)$$

$$(\text{alternativ: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix})$$

2. Gerade und Ebene sind parallel:

Gegeben ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a. Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad / - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / -s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} / -t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. Das lineare Gleichungssystem mit 3 Unbekannten lösen:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -r + 2s - t = -1 \\ 2r - s - t = 3 \\ -6r + 3s + 3t = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \text{keine Lösung} \text{ (mit TR oder Gaussverfahren)}$$

\Rightarrow g und E sind parallel

3. Gerade liegt in der Ebene:

Gegeben ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a. Gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad | \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} / -s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} / -t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b. Das lineare Gleichungssystem mit 3 Unbekannten lösen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -r + 2s - t = 1 \\ 2r - s - t = -2 \\ -6r + 3s + 3t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \text{∞-viele Lösungen} \text{ (mit TR oder Gaussverfahren)}$$

=> g liegt in E