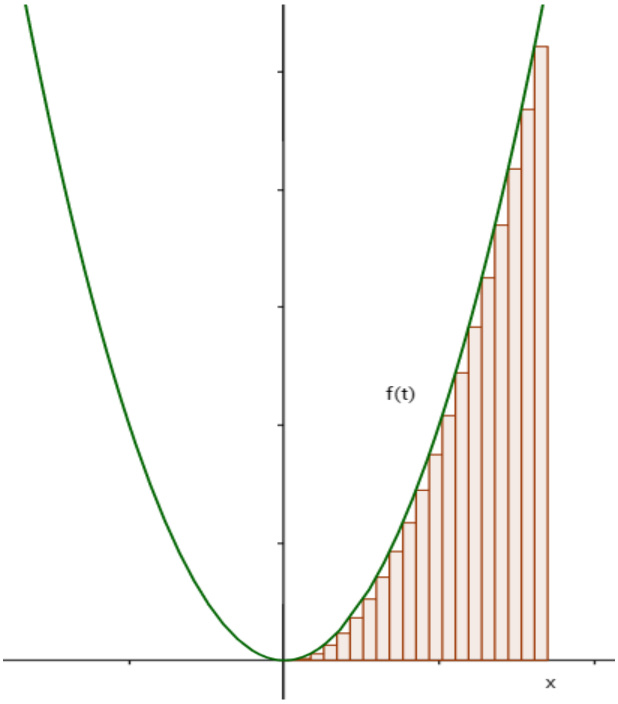
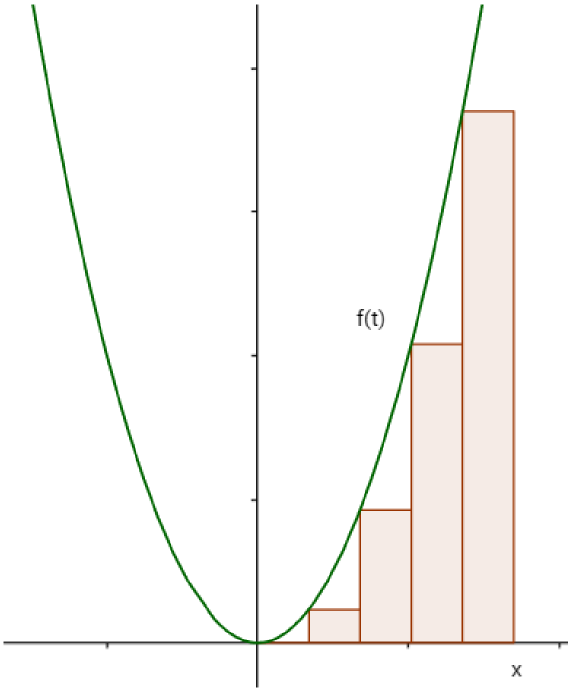
Lösung Untersuchung der Fläche unter f(t) = t² im Intervall [0;x]

Gruppe 1: Untersummen:





Unterteilen Sie das Intervall [0;x] in n Teile, also jeder Abschnitt ist $\frac{x}{n}$ lang!

Untersumme:

$U_n = 0\cdot\frac{x}{n} + f(\frac{x}{n})\cdot\frac{x}{n} + f(\frac{2x}{n})\cdot\frac{x}{n} + f(\frac{3x}{n})\cdot\frac{x}{n} + f(\frac{4x}{n})\cdot\frac{x}{n} + \ldots\ldots + f(\frac{(n-2)\cdot x}{n})\cdot\frac{x}{n} + f(\frac{(n-1)\cdot x}{n})\cdot\frac{x}{n}$

$= 0 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n} + \left(\frac{2x}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n} + \left(\frac{3x}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n} + \ldots\ldots + \left(\frac{(n-2)\cdot x}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n} + \left(\frac{(n-1)\cdot x}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n}$

$= \left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + (n-2)^2 + (n-1)^2)$ $\left(\frac{x}{n}\right)^3$ ausklammern

$= \left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$ $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$

$= \frac{x^3}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}$ durch n teilen

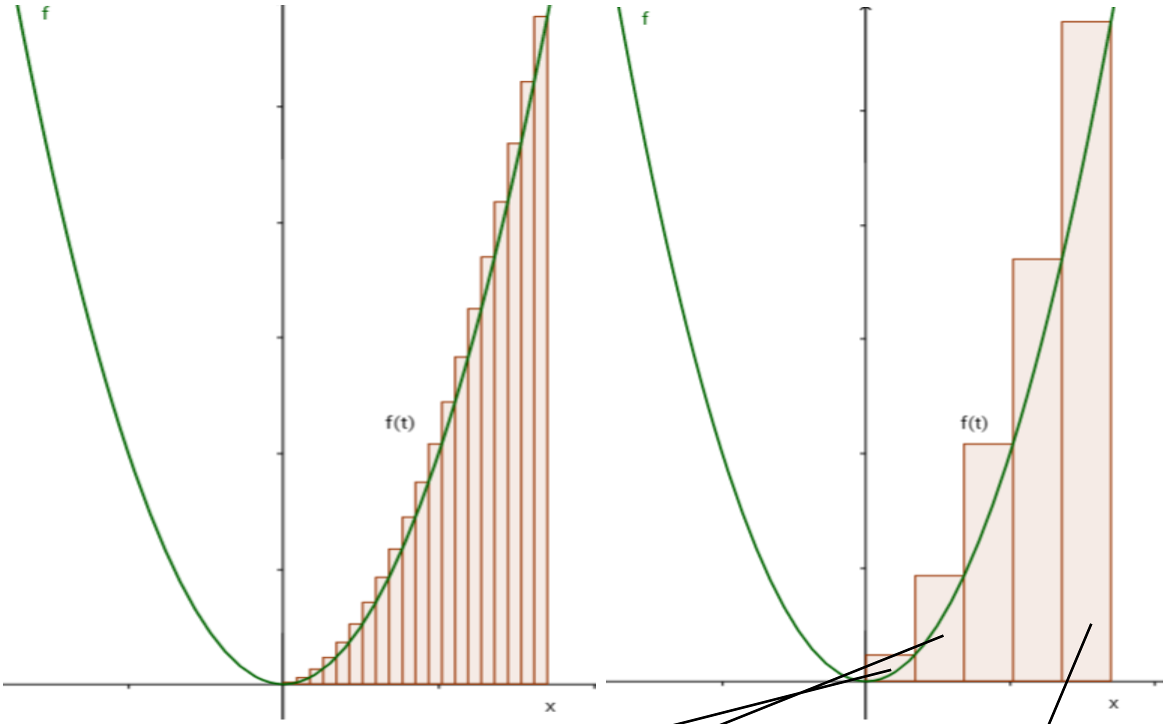
$= \frac{x^3}{6}\cdot\underset{\downarrow\atop \mathbf{1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot 1\cdot\underset{\downarrow\atop \mathbf{2}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)}$ für $n \to \infty$

Zusammenfassung:

$\lim_{n\to\infty} Un = \frac{x^3}{6}\cdot 2 = \frac{x^3}{3}$

Untersuchung der Fläche unter f(t) = t² im Intervall [0;x]

Gruppe 2: Obersummen:



Unterteilen Sie das Intervall [0;x] in n Teile, also jeder Abschnitt ist ___________ lang!

Obersumme: O_n =$+ f(\frac{x}{n}) \cdot \frac{x}{n} + f(\frac{2x}{n}) \cdot \frac{x}{n} + f(\frac{3x}{n}) \cdot \frac{x}{n} + f(\frac{4x}{n}) \cdot \frac{x}{n} + \ldots\ldots + f(\frac{(n-1)\cdot x}{n}) \cdot \frac{x}{n} + f(\frac{n\cdot x}{n}) \cdot \frac{x}{n}$

$= \left(\frac{x}{n}\right)^2 \cdot \frac{x}{n} + \left(\frac{2x}{n}\right)^2 \cdot \frac{x}{n} + \left(\frac{3x}{n}\right)^2 \cdot \frac{x}{n} + \ldots\ldots + \left(\frac{(n-1)\cdot x}{n}\right)^2 \cdot \frac{x}{n} + \left(\frac{n\cdot x}{n}\right)^2 \cdot \frac{x}{n}$

$= \left(\frac{x}{n}\right)^3 \cdot (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + (n-1)^2 + (n)^2)$

$= \left(\frac{x}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}\, n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ $\qquad 1^2+2^2+3^2 + \ldots + (n)^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

$= \frac{x^3}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}$

$= \frac{x^3}{6} \cdot 1 \cdot (1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow}) \cdot (2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow})$ $\qquad$ für $n \to \infty$

1 $\qquad$ 2

Zusammenfassung:

$\lim\limits_{n\to\infty} On = \frac{x^3}{6} \cdot 2 = \frac{x^3}{3}$