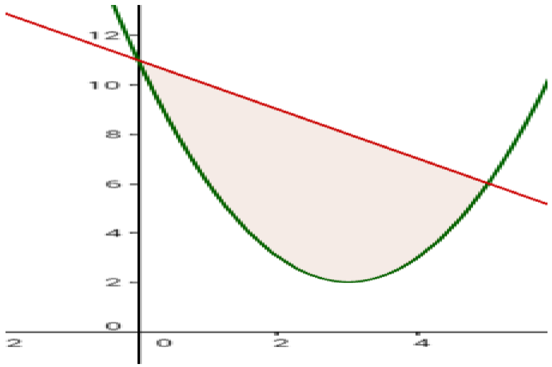
Lösungen zu den Textaufgaben zur Integralrechnung

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Rechnung</th><th>Ergebnis</th></tr>
<tr><td>1. Aus einem Stück Metall soll eine Form geschnitten werden, die durch die Funktionen f(x) = x²— 6x + 11 und g(x) = —x + 11 begrenzt werden, x und f(x) in dm.

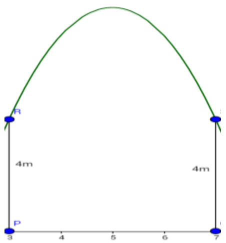
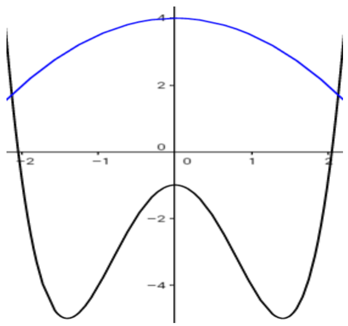
a. Berechnen Sie die Fläche des Metallstückes.
b. Das Stück Metall soll von beiden Seiten mit einem Speziallack überzogen werden. Berechnen Sie, wie viel die Lackierung für 100 Teile kostet, wenn der Preis 2,10 €/dm² beträgt.

</td><td>a. Berechnung der Schnittpunkte:
f(x) = g(x)
⇔ x²— 6x + 11 = —x + 11
⇔ x² –5x = 0
⇔ x · (x – 5) = 0
⇔ x = 0 v x = 5

Berechnung der Fläche A:
A = $\left|\int_0^5 [g(x) - f(x)]dx\right|$ (Der Betrag ist überflüssig, wenn man vorher kontrolliert, welche Funktion größer ist.)
= $\left|\int_0^5 [(-x+11) - (x^2 - 6x + 11)]dx\right|$
= $\left|\int_0^5 (-x^2 + 5x)dx\right|$ = $\left|\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2\right]_0^5\right|$
= $\left|\frac{125}{6} - 0\right|$ = 20,8$\overline{3}$

b. 20,8$\overline{3}$ · 2,10 · 2 · 100 = 8750</td><td>Die Fläche beträgt 20,8$\overline{3}$ dm².

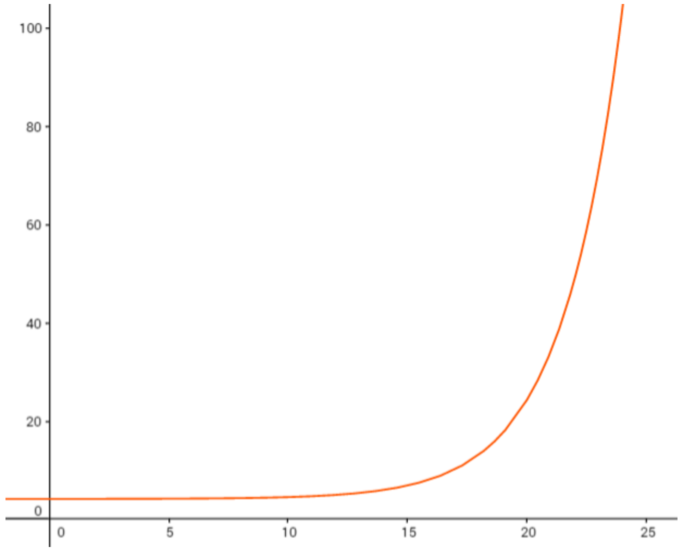
Die Lackierung kostet 8750 €.</td></tr>
</table>

2. Ein Kirchenfenster wird oben durch die Funktion f(x) = $-x^2 + 10x - 17$ begrenzt, x und f(x) in Metern. Berechnen Sie, wie viel m² Glas benötigt werden 	$\int_3^7 f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 17x\right]_3^7$ $= \left(-\frac{1}{3}\cdot 7^3 + 5\cdot 7^2 - 17\cdot 7\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 5\cdot 3^2 - 17\cdot 3\right)$ $= \frac{35}{3} - (-15) = \frac{80}{3} = 26{,}\overline{6}$	Man braucht $26{,}\overline{6}$ m² Glas.
3. Eine Zahnarztpraxis möchte ihr Zahn - Logo in Messing an ihre Tür anbringen. Die Figur ist durch die Funktionen f(x) = $-0{,}5x^2 + 4$ und g(x) = $x^4 - 4x^2 - 1$ begrenzt, x und f(x) in dm. Berechnen Sie, wie viel dm² Messing benötigt werden! 	Berechnung der Schnittpunkte: $x^4 - 4x^2 - 1 = -0{,}5x^2 + 4$ $\Leftrightarrow x^4 - 3{,}5x^2 - 5 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx -2{,}14 \vee x \approx 2{,}14$ Berechnung der Fläche: $A = \int_{-2{,}14}^{2{,}14} (f(x) - g(x))dx$ $= \int_{-2{,}14}^{2{,}14} (-x^4 + 3{,}5x^2 + 5)dx$ $= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{3{,}5}{3}x^3 + 5x\right]_{-2{,}14}^{2{,}14}$ $\approx 26{,}31$	Sie brauchen 26,31 dm² Messing.

4. Die Funktion $f(x) = e^{0,4x-5} + 4$ gibt die Wachstumsrate der Unfälle an Sylvester an, $0 \leq x \leq 24$. Zu Beginn (x = 0) wurden 10 Unfälle registriert.

a. Wie viele Verkehrsunfälle passieren in den ersten 18 Stunden?

b. Wenn die Unfälle um mehr als 50 steigen, führt die Polizei verstärkt Kontrollen durch. Wann ist dies der Fall?



a. $10 + \int_0^{18} f(x)dx$

$= 10 + \left[\frac{1}{0,4} \cdot e^{0,4x-5} + 4x\right]_0^{18}$

$= 10 + (2,5 \cdot e^{0,4 \cdot 18-5} + 4 \cdot 18) - (2,5e^{-5})$

$\approx 10 + 94,55 - 0,017 = 104,546$

b. $f(x) = 50 \Leftrightarrow e^{0,4x-5} + 4 = 50 \Leftrightarrow e^{0,4x-5} = 46$

$\Leftrightarrow \ln(e^{0,4x-5}) = \ln(46)$

$\Leftrightarrow 0,4x - 5 \approx 3,829$

$\Leftrightarrow 0,4x \approx 8,829$

$\Leftrightarrow x \approx 22,07$

Da f(x) streng monoton steigt gilt:

$f(x) > 50$ für alle $x > 22,07$.

In den ersten 18 Stunden passieren 104 Unfälle.

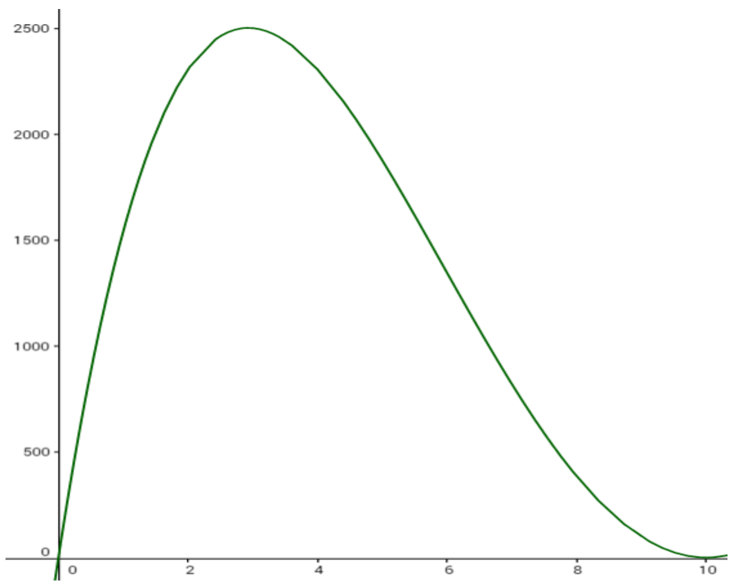
Die Polizei muss ab der 22. Stunde stärker kontrollieren.

5. In einem Labor werden Bakterien gezüchtet. Die Anzahl der Bakterien in den ersten 10 Tagen durch die Funktion
   $f(x) = -x^4 + 40x^3 - 500x^2 + 2000x + 1$,
   x in Tagen mit $0 \leq x \leq 10$ angegeben.

a. Wie viele Bakterien gibt es am 8. Tag?

b. Wie viele Bakterien gibt es in den ersten 8 Tagen im Durchschnitt?

c. Wie viele Bakterien werden durchschnittlich zwischen den 2. und dem 4. Tag gezüchtet?



a. $f(8) = 385$

b. $\frac{1}{8} \cdot \int_0^8 f(x)dx$

$= \frac{1}{8} \cdot \left[-\frac{1}{5}x^5 + 10x^4 - \frac{500}{3}x^3 + 1000x^2 + x\right]_0^8$

$= \frac{1}{8} \cdot [-\frac{1}{5} \cdot 8^5 + 10 \cdot 8^4 - \frac{500}{3} \cdot 8^3 + 1000 \cdot 8^2 + 8 - 0]$

$= \frac{1}{8} \cdot 13081{,}1 = 1635{,}13$

c. $\frac{1}{4-2} \cdot \int_2^4 f(x)dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{5}x^5 + 10x^4 - \frac{500}{3}x^3 + 1000x^2 + x\right]_2^4$

$= \frac{1}{2} \cdot [-\frac{1}{5} \cdot 4^5 + 10 \cdot 4^4 - \frac{500}{3} \cdot 4^3 + 1000 \cdot 4^2 + 4 -$

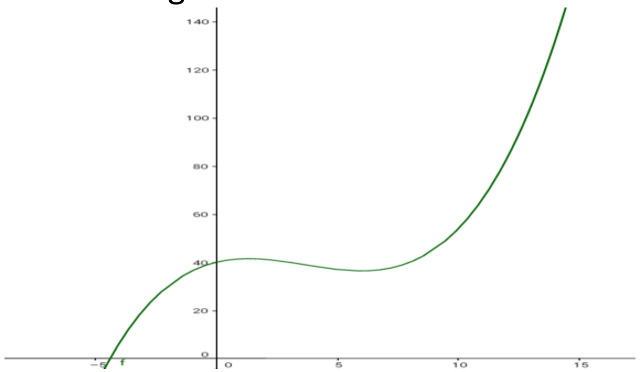
$(-\frac{1}{5} \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^4 - \frac{500}{3} \cdot 2^3 + 1000 \cdot 2^2 + 2\ )]$

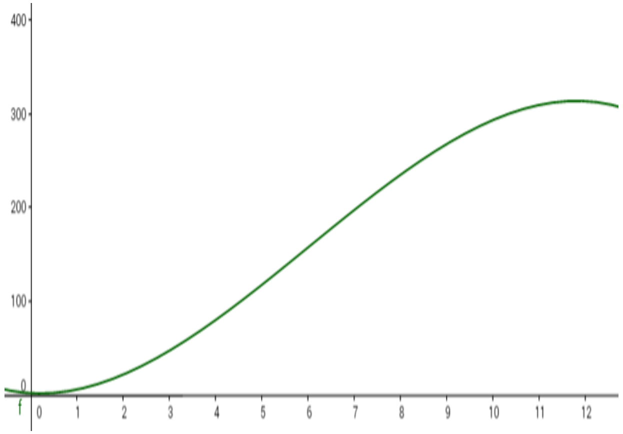
$= \frac{1}{2} \cdot (7692{,}53 - 2822{,}27) = 2435{,}13$

Am 8. Tag sind 385 Bakterien vorhanden.

Im Schnitt sind in den ersten 8 Tagen 1635 Bakterien vorhanden.

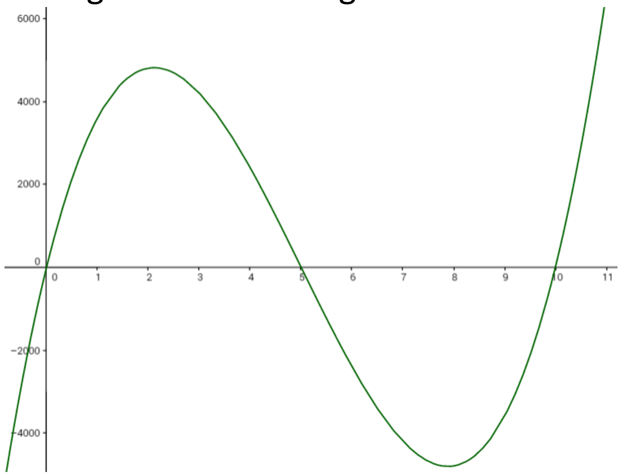
Zwischen dem 2. und dem 4. Tag sind im Schnitt 2435 Bakterien vorhanden.

6. Ein Auto fährt auf eine Autobahn auf. Die Funktion f(x) = 0,1 x³ – 1,1 x² + 2,4x + 40 gibt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs in km/h an, x in Sekunden mit 0 ≤ x ≤ 15. a. Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs zwischen 0s und 12s!	a. $\frac{1}{12}\cdot\int_0^{12} f(x)dx$ $= \frac{1}{12}\cdot[0{,}025x^4 + 0{,}3\bar{6}x^3 + 1{,}2x^2 + 40x]_0^{12}$ $= \frac{1}{12}\cdot[0{,}025\cdot 12^4 + 0{,}3\bar{6}\cdot 12^3 + 1{,}2\cdot 12^2 + 40\cdot 12 - 0]$ $= \frac{1}{12}\cdot 537{,}6 = 44{,}8$	Der Autofahrer fährt in den ersten 12 Sekunden im Schnitt 44,8km/h.
b. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion g(x), die die Geschwindigkeit in m/s (Meter/Sekunde) angibt!	b. $\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3{,}6}$ m/s $d.h.$ $g(x) = \frac{1}{3{,}6}\cdot(0{,}1x^3 - 1{,}1x^2 + 2{,}4x + 40)$	$g(x) = \frac{1}{3{,}6}\cdot(0{,}1x^3 - 1{,}1x^2 + 2{,}4x + 40)$
c. Wie viele Meter ist das Auto in den ersten 15 Sekunden gefahren?	c. $\int_0^{15} g(x)dx$ $= \frac{1}{3{,}6}\cdot[0{,}025x^4 + 0{,}3\bar{6}x^3 + 1{,}2x^2 + 40x]_0^{15}$ $= \frac{1}{3{,}6}\cdot(0{,}025\cdot 15^4 + 0{,}3\bar{6}\cdot 15^3 + 1{,}2\cdot 15^2 + 40\cdot 15 - 0)$ $= \frac{1}{3{,}6}\cdot 898{,}125 = 249{,}48$	In den ersten 15 Sekunden hat das Auto 249,48m zurückgelegt.
d. Ab der 10. Sekunde hat das Auto die Autobahn erreicht. Berechnen Sie, ob es sich bei dem Auto um einen Porsche handelt, der in 5 Sekunden um 110km/h beschleunigen kann. 	d. f(15) – f(10) = 166 – 54 = 112	Es handelt sich um einen Porsche, denn er beschleunigt um 112 km/h.

7. Die Funktion f(x) = $-0{,}4x^3 + 7{,}2x^2 - 2{,}8x$, x zeigt modellhaft die momentane Wachstumsgeschwindigkeit einer Tierpopulation an, x in Monaten mit $0 \leq x \leq 17$, f(x) in Anzahl der Tiere. Zu Beginn der Überwachungsphase waren 400 Tiere vorhanden. a. Geben Sie ein Funktion an, die die Anzahl der Tiere zur Zeit t angibt! b. Berechnen Sie, wie viele Tiere es nach 12 Monaten gibt! 	a. Gesucht ist g(t): g(t) = 400 + $\int_0^t f(x)dx$ (Anfangspopulation + die dazu kommenden Tiere) = $[-0{,}1x^4 + 2{,}4x^3 - 1{,}4x^2]_0^t$ + 400 = $-0{,}1t^4 + 2{,}4t^3 - 1{,}4t^2$ + 400 b. g(12) = 2272	g(t) = $-0{,}1t^4 + 2{,}4t^3 - 1{,}4t^2$ + 400 Nach 12 Monaten gibt es 2272 Tiere.

8. Die Zufluss/Abflussgeschwindigkeit von Wasser in einen See mit Talsperre wird modelliert durch die Funktion
$f(x) = 100x^3 - 1500x^2 + 5000x$,
x in Stunden, f(x) in m³/h.

a. Wann läuft mehr Wasser in den See hinein als hinaus?
b. Zu Beginn der Messung sind 6 Mio m³ Wasser im See. Berechnen Sie, wie viele m³ Wasser nach 6 Stunden im See sind!
c. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt wieder genau so viel Wasser im See ist wie zu Beginn der Messung!



a. Gesucht: Nullstellen
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 100x^3 - 1500x^2 + 5000x = 0$
$\Leftrightarrow x \cdot (100x^2 - 1500x + 5000) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 5 \lor x = 10$
Untersuchung des Intervalls [0;5]: f(2) = 4800
Untersuchung des Intervalls [5;10]: f(6) = −2400

b. $A = 6 \text{ Mio} + \int_0^6 f(x)dx$
$= 6 \text{ Mio} + [25x^4 - 500x^3 + 2500x^2]_0^6$
$= 6\text{Mio} + 14400$

c. Gesucht ist eine Zahl a, so dass der Mittelwert der Funktion f(x) im Intervall [0;a] 0 ist.
$\overline{m} = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x)dx$
$= \frac{1}{a} \cdot [25x^4 - 500x^3 + 2500x^2]_0^a$
$= \frac{1}{a} \cdot (25a^4 - 500a^3 + 2500a^2)$
$= 25a^3 - 500a^2 + 2500a$

$25a^3 - 500a^2 + 2500a = 0$
$\Leftrightarrow a \cdot (25a^2 - 500a + 2500) = 0$
$\Leftrightarrow a = 0 \lor a = 10$

In den ersten 5 Stunden und nach der 10. Stunde fließt Wasser dazu.

Nach 6 Stunden sind 6.014.400 m³ Wasser im See.

Nach 10 Stunden ist wieder genau so viel Wasser im See wie zu Beginn der Messung.