HERLEITUNG DER FORMEL FÜR DIE STANDARDABWEICHUNG

www.matheportal.wordpress.com

STANDARDABWEICHUNG UND MITTELWERT

Ergebnisse der Versuchsreihe 1:

Versuch	1	2	3	4	5	6
Ergebnis	2	5	3	6	4,5	3,5

Der Mittelwert dieser Versuchsreihe ist:

$$\frac{2+5+3+6+4{,}5+3{,}5}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

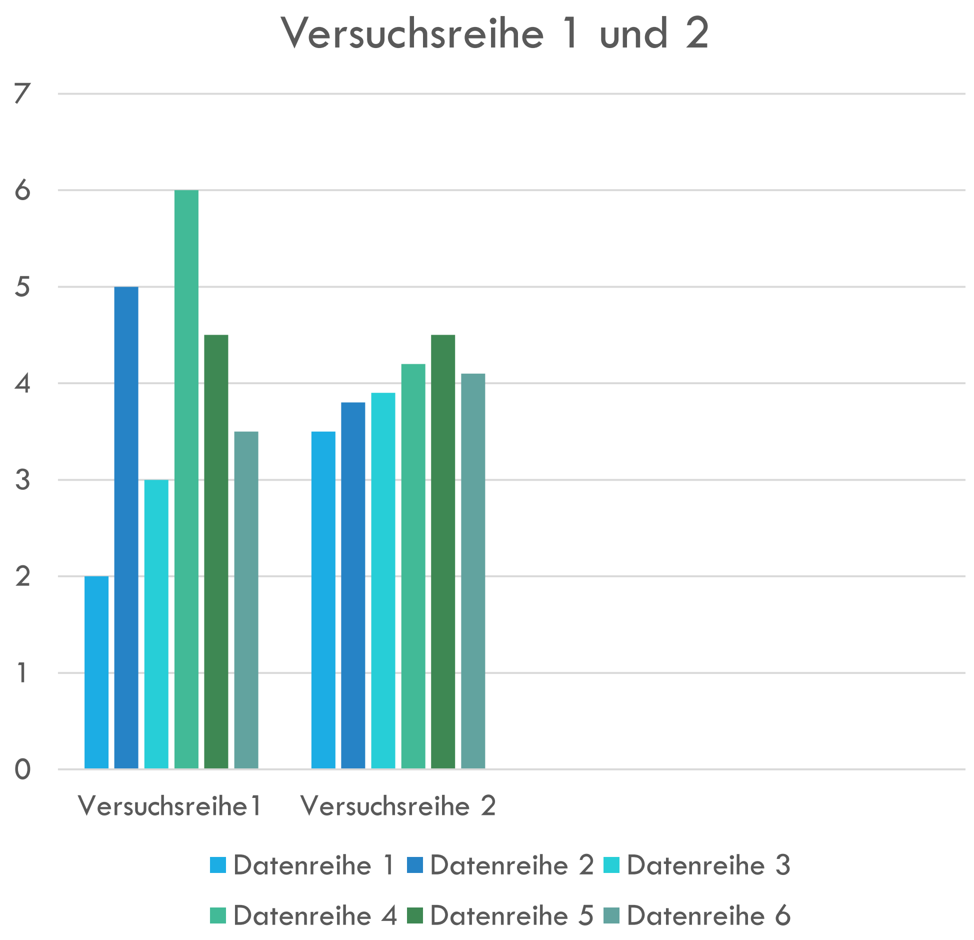
Ergebnisse der Versuchsreihe 2:

Versuch	1	2	3	4	5	6
Ergebnis	3,6	3,8	3,9	4,2	4,4	4,1

Der Mittelwert dieser Versuchsreihe ist:

$$\frac{3{,}6+3{,}8+3{,}9+4{,}2+4{,}4+4{,}1}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

BEIDE MESSUNGEN HABEN DEN GLEICHEN MITTELWERT



Obwohl beide den Mittelwert 4 haben, sieht man doch, dass die Werte der 2. Versuchsreihe weniger gestreut sind als die der ersten.

Daher sucht man neben dem Mittelwert noch eine Zahl, die etwas über die Streuung der Werte aussagt.

Dazu ist es sinnvoll, die Abweichung der Werte vom Mittelwert zu betrachten.

WIE IST DIE STANDARDABWEICHUNG SINNVOLL ZU DEFINIEREN?

1. Man könnte die Differenzen der Werte vom Mittelwert bilden und addieren:

1	2	3	4	5	6
2	5	3	6	4,5	3,5

Also bei der 1. Versuchsreihe:

$[(2-4) + (5-4) + (3-4) + (6-4) + (4{,}5-4) + (3{,}5-4)] : 6$

$= (-2 + 1 - 1 + 2 + 0{,}5 - 0{,}5) : 6 = \mathbf{0}$

Das macht keinen Sinn, da sich die negativen und positiven Werte aufheben.

Man behebt dies, indem man die Differenzen quadriert, sodass man nur noch positive Werte erhält, und anschließend die Wurzel zieht* :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot [(2-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4{,}5-4)^2 + (3{,}5-4)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} \cdot [4 + 1 + 1 + 4 + 0{,}25 + 0{,}25]} = \sqrt{1{,}75} \approx 1{,}32$$

Bei der 2. Versuchsreihe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot [(3{,}6-4)^2 + (3{,}8-4)^2 + (3{,}9-4)^2 + (4{,}2-4)^2 + (4{,}4-4)^2 + (4{,}1-4)^2]} = \sqrt{0{,}07} \approx 0{,}26$$

*Man hätte auch den Betrag nehmen können, mit dem zu rechnen ist aber sehr kompliziert.

DEFINITION DER EMPIRISCHEN STANDARDABWEICHUNG

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $a_1, a_2, \ldots a_n$ an und ist $\overline{m}$ der Mittelwert, so definiert man die Standardabweichung folgendermaßen:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot [(a_1 - \overline{m})^2 + (a_2 - \overline{m})^2 + \cdots + (a_3 - \overline{m})^2]}$$

STANDARDABWEICHUNG UND ERWARTUNGSWERT:

Analog gilt:

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $a_1, a_2, \ldots a_n$ an und ist E(X) der Erwartungswert μ, so definiert man die Standardabweichung folgendermaßen:

$$\sigma = \sqrt{(a_1-\mu)^2 \cdot P(X=a_1) + (a_2-\mu)^2 \cdot P(X=a_2) + \cdots + (a_n-\mu)^2 \cdot P(X=a_n)}$$

Beispiel:

Aus einer Urne mit 12 roten und 20 grünen Kugeln werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der gezogenen grünen Kugeln.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{12}{32} \cdot \frac{12}{32} + 1 \cdot \left(\frac{12}{32} \cdot \frac{20}{32} + \frac{20}{32} \cdot \frac{12}{32}\right) + 2 \cdot \frac{20}{32} \cdot \frac{20}{32}$$

$$= 0 \cdot \frac{9}{64} + 1 \cdot \frac{15}{32} + 2 \cdot \frac{25}{64} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$\sigma = \sqrt{(0-1{,}25)^2 \cdot \frac{9}{64} + (1-1{,}25)^2 \cdot \frac{15}{32} + (2-1{,}25)^2 \cdot \frac{25}{64}} \approx 0{,}68$$

Wenn man 0,57 (=1,25−0,68) bzw. 1,93 (=1,25 + 0,68) grüne Kugeln zieht, liegt man innerhalb des Standardabweichungsintervalls.