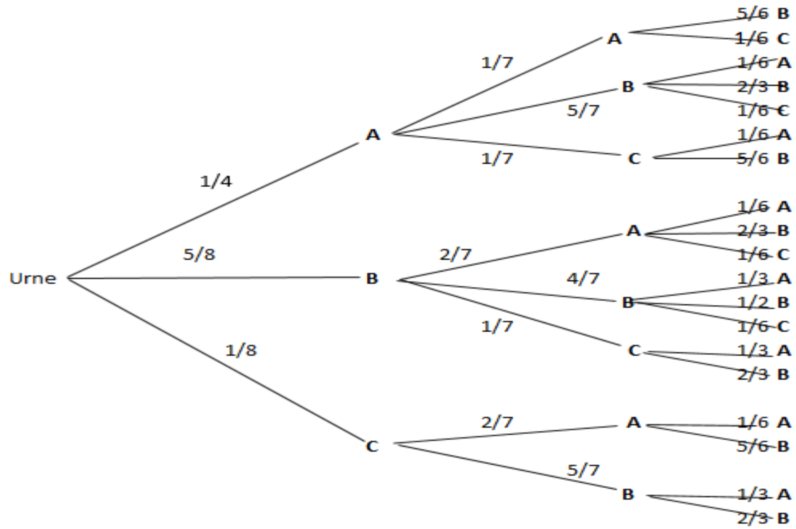
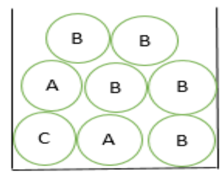
Lösungen zu den Textaufgaben zur Statistik- und Wahrscheinlichkeitsrechnung: Urne

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Rechnung</th><th>Lösung</th></tr>
<tr>
<td>
1. In einer Urne liegen Kugeln mit den Buchstaben A, B und C. Die Kugeln werden nach dem Ziehen <u>nicht wieder zurückgelegt</u>. Es wird drei Mal gezogen.

a. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm!
b. i. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass 2mal B und 1mal C gezogen werden!
ii. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 2mal A und 1mal B gezogen wird!
iii. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A, B und C gezogen wird!
c. X sei die Anzahl der gezogenen Kugeln mit dem Buchstaben B. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung, wenn 2mal gezogen wird!
d. In einem Supermarkt steht eine Frau an einem Stand, der für Joghurt wirbt. Sie zieht eine Kugel. Man erhält beim Ziehen der Kugel B eine Packung und bei C drei Packungen Joghurt. Berechnen Sie, wie viele Packungen Joghurt man beim Ziehen der Kugel A erhalten muss, um durchschnittlich 3 Packungen Joghurt mit nach Hause zu nehmen.
</td>
<td>
a.


b. i. $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{336}+\frac{20}{336}+\frac{20}{336}=\frac{60}{336}\approx 0{,}17857$
ii. $\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{30}{336}\approx 0{,}089286$
iii. $6\cdot\frac{10}{336}=\frac{60}{512}\approx 0{,}17857$
$c.\ \mu = 0\cdot(\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{2}{56})+1\cdot(\frac{5}{28}+\frac{10}{56}+\frac{5}{56}+\frac{2}{56})+2\cdot\frac{20}{56}==0\cdot\frac{3}{28}+1\cdot\frac{27}{56}+2\cdot\frac{20}{56}$
$=\frac{67}{56}\approx 1{,}196$
$\sigma=\sqrt{(0-1{,}196)^2\cdot\frac{3}{28}+(1-1{,}196)^2\cdot\frac{27}{56}+(2-1{,}196)^2\cdot\frac{20}{56}}\approx 0{,}6345$
$d.\ \frac{5}{8}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 3+\frac{2}{8}\cdot x=3 \Leftrightarrow 1+\frac{2}{8}\cdot x=3 \Leftrightarrow \frac{2}{8}\cdot x=2 \Leftrightarrow x=8$
</td>
<td>


b. i. Die Wahrscheinlichkeit ist 17,86%.
ii. Die Wahrscheinlichkeit ist 0,89%.
iii. Die Wahrscheinlichkeit ist 11,72%.
iv. Die Wahrscheinlichkeit ist 17,86%.

c. Der Erwartungswert sind 1,2 blaue Kugeln, die Standardabweichung ist 0,63.

d. Man muss 8 Packungen erhalten, wenn man die Kugel A zieht.
</td>
</tr>
</table>

2. In einer Urne liegen Kugeln mit den Buchstaben A, B und C. Die Kugeln werden nach dem Ziehen <u>wieder zurückgelegt</u>. Es wird 80mal gezogen.		
a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, i. dass genau 12mal A gezogen wird! ii. dass höchstens 60mal B gezogen wird! iii. dass mindestens 10 und höchstens 20mal C gezogen wird!	a. i. $B_{80;0,25}(12) \approx 0{,}011465$ ii. $F_{80;0,625}(60) \approx 0{,}993615$ iii. $F_{80;0,125}(10 \leq X \leq 20) \approx 0{,}549843$	a. i. Die Wahrscheinlichkeit ist 1,15%. ii. Die Wahrscheinlichkeit ist 99,36%. iii. Die Wahrscheinlichkeit ist 54,98%.
b. Wie viele Kugeln muss man ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine Kugel mit dem Buchstaben B zu ziehen?	b. $1 - B_{n;\frac{5}{8}}(0) \geq 0{,}9$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n \geq 0{,}9$ $\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n \geq 0{,}9$ $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^n \leq 0{,}1$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{3}{8}\right) \leq \ln(0{,}1)$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{3}{8}\right)} \approx 2{,}348$	b. Man muss mindestens 3 Kugeln ziehen.
c. Wie oft muss man Ziehen, damit man 40 Kugeln mit dem Buchstaben B erwarten kann?	c. $n \cdot \frac{5}{8} = 40 \Leftrightarrow n = 64$	c. Man muss 64mal ziehen.
d. Berechnen Sie, wie viele Kugeln mit dem Buchstaben B mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% zu erwarten sind!	d. Erwartungswert: $\mu = 80 \cdot \frac{5}{8} = 50$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{80 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}} \approx 4{,}33 > 3$ $[\mu - 2{,}58 \cdot \sigma;\ \mu + 2{,}58 \cdot \sigma] \approx [50 - 11{,}1714;\ 50 + 11{,}1714] \approx [38{,}83; 61{,}17]$	d. Man kann zwischen 39 und 61 Kugeln erwarten.
e. In einem Versuch wurden bei 80 Zügen 55 Kugeln mit dem Buchstaben B gezogen. Berechnen Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% die verträglichen Wahrscheinlichkeiten und bewerten Sie den Versuch!	e. $\mu = 80 \cdot p$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{80 \cdot p \cdot (1-p)}$ $55 = 80p \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{80 \cdot p \cdot (1-p)}$ $\Leftrightarrow 55 - 80p = \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{80 \cdot p - 80p^2}$ $\Leftrightarrow (55 - 80p)^2 = 6{,}6564 \cdot (80 \cdot p - 80p^2)$ $\Leftrightarrow 3025 - 8800p + 6400p^2 = 532{,}512p - 532{,}512p^2$ $\Leftrightarrow 6932{,}51p^2 - 9332{,}51p + 3025 = 0$ $\Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}5438 \vee p_2 \approx 0{,}8024$ $P \in [0{,}5438; 0{,}8024]$ $\frac{5}{8} = 0{,}625 \in [0{,}5438; 0{,}8024]$	e. Die verträglichen Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 54,38 und 80,24%. Der Versuch ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% real.