Lösungen zu den Zusammenfassende Übungen zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe	Lösung
1. Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsvorschrift? a) $f(x) = 2x^5 + 3x^2$ b) $f(x) = 2x^4 - 3$ c) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3$ d) $f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 3$ e) $f(x) = 2x^5 + 3x^3$ f) $f(x) = -2x^5 + 3x^3$	1b 2c 3a 4f 5d 7e
2. Bestimmen Sie die Symmetrie und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$! a. $f(x) = x^8 + 3x^5$ b. $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 3$ c. $f(x) = -3x^4 + 4x^2 + 4$ d. $f(x) = -5x^3 - 2x$	a. keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorkommen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ b. nicht punktsymmetrisch zu (0/0), es kommen zwar nur ungerade Exponenten vor, allerdings auch ein Summand ohne x; (punktsymmetrisch zu (0/3)) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ c. achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten vorkommen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ d. punktsymmetrisch zu (0/0), da nur ungerade Exponenten vorkommen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen! a. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 45$ b. $f(x) = 2x^4 + 22x^2 + 240$ c. $f(x) = -3x^4 + 123x^2 - 1200$	a. $x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z - 45 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-45)} = 2 \pm 7$ $\Leftrightarrow z_1 = 9 \vee z_2 = -5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = -7 \Leftrightarrow$ **$x = 3 \vee x = -3$** b. $2x^4 + 22x^2 + 240 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 11x^2 + 120 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 11z + 120 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 120} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{-89{,}75}$ **keine Lösung, d.h. keine Nullstelle** c. $-3x^4 + 123x^2 - 1200 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 41z + 400 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{41}{2}\right)^2 - 400} \approx 20{,}5 \pm 4{,}5 \Leftrightarrow z_1 = 25 \vee z_2 = 16$ $\Leftrightarrow x^2 = 25 \vee x^2 = 16 \Leftrightarrow$ **$x = 5 \vee x = -5 \vee x = 4 \vee x = -4$**

d. d. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x$

e. $f(x) = x \cdot (x-4)$

f. f. $f(x) = (x + 5) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2$

g. $f(x) = (-2x^2+ 22x-48) \cdot (3x^2 + 6x)$

h. $f(x) = 2x^4 - 32$

i. $f(x) = \frac{1}{2}x^7 + 8192$

j. $f(x) = 5x^6 + 5$

d. $x^3 + 10x^2 + 25x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 10x + 25) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 25}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5 \pm \sqrt{0} \Leftrightarrow$ **$x = 0 \vee x = 5$**

e. $x \cdot (x-4) \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-4) = 0 \Leftrightarrow$ **$x = 0 \vee x = 4$**

f. $(x + 5) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2 \Leftrightarrow$ **$x = -5 \vee x = 3 \vee x = -2$**

g. $(-2x^2+ 22x-48) \cdot (3x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+ 22x-48 = 0 \vee 3x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \vee x \cdot (3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 24} \vee x = 0 \vee x = -2$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = 5{,}5 \pm 2{,}5 \vee x = 0 \vee x = -2 \Leftrightarrow$ **$x = 3 \vee x = 8 \vee x = 0 \vee x = -2$**

h. $2x^4 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \Leftrightarrow$ **$x = 2 \vee x = -2$**

i. $\frac{1}{2}x^7 + 8192 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{16384} \Leftrightarrow$ **$x = -4$**

j. $5x^6 + 5 = 0 \Leftrightarrow 5x^6 = -5 \Leftrightarrow x^6 = -1$ **keine Lösung, d.h. keine Nullstelle**

4. Bestimmen Sie alle Stellen x, an denen die Funktion f den Wert 9 annimmt!

a. $f(x) = 0{,}6x^4 - 12x^2 + 66{,}6$

b. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 20x + 25$

a. $0{,}6x^4 - 12x^2 + 66{,}6 = 9 \Leftrightarrow 0{,}6x^4 - 12x^2 + 57{,}6 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 20x^2 + 96 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 20z + 96 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 96} = 10 \pm 2 \Leftrightarrow z_1 = 12 \vee z_2 = 8$

$\Leftrightarrow$ **$x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$**

b. $2x^3 + 2x^2 - 20x + 25 = 9 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 20x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -4$ mit TR oder mit Polynomdivision:

$x^3 + x^2 - 10x + 8 : (x - 2) = x^2 + 3x - 4$

$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$

$3x^2 - 10x$

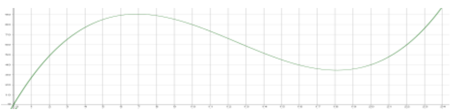
$\underline{-(3x^2 - 6x)}$

$-4x + 8$

$\underline{-(-4x + 8)}$

0

$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$ (p-q-Formel) $\Leftrightarrow$ **$x = 1 \vee x = 2 \vee x = -4$**

5. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen! a. $f(x) = x^2 - 7x - 6$ und $g(x) = x + 3$ b. $f(x) = 3x^2 + 2x + 20$ und $g(x) = 2x^2 + 6x + 9$ c. $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 4$ und $g(x) = 2x^4 + 6x^2 - 8$	a. $x^2 - 7x - 6 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-9)} = 4 \pm 5$ $\Leftrightarrow x = 9 \vee x = -1$ $f(9) = 12$ $f(-1) = 2$ => **$S_1(-1/2)$ $S_2(9/12)$** b. $3x^2 + 2x + 20 = 2x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 11 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 11} = 2 \pm \sqrt{-7}$ **kein Schnittpunkt** c. $4x^4 - 8x^2 + 4 = 2x^4 + 6x^2 - 8 \Leftrightarrow 2x^4 - 14x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 7z + 6 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6} = 3,5 \pm 2,5 \Leftrightarrow x^2 = 6 \vee x^2 = 1$ $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}$ $f(1) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(-\sqrt{6}) = 100$, $f(\sqrt{6}) = 100$ **$S_1(-1/0)$ $S_2(1/0)$ $S_1(-\sqrt{6}/100)$ $S_2(\sqrt{6}/100)$**
6. Die Punkte P, Q und R liegen auf dem Graphen der Potenzfunktion $f(x) = 4x^4$! a. Bestimmen Sie jeweils die fehlenden Koordinaten! P(3/y), Q(−2/y), R(x/1024) und S(x/0,25) b. Liegt der Punkt S(−5/2500) auf dem Graphen? Liegt der Punkt T(2/62) auf, unter oder über dem Graphen?	a. $f(3) = 324$ => **P(3/324)** $f(-2) = 64$ => **Q(−2/64)** $4x^4 = 1024 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4$ => **$R_1(-4/1024)$ $R_2(4/1024)$** $4x^4 = 0,25 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{0,0625} = \pm 0,5$ => **$S_1(-0,5/0,25)$ $S_2(0,5/0,25)$** b. $f(-5) = 2500$, d.h. **S liegt auf dem Graphen** $f(2) = 64 > 62$, d.h. **T liegt unter dem Graphen**
7. Ein Auto fährt auf einer Landstraße. Das Tempo kann in den ersten 24 Sekunden modelliert werden durch die Funktion $f(x) = 0,08\,x^3 - 3x^2 + 30x$, x in Sekunden, $0 \le x \le 24$ und f(x) in km/h.  a. Bestimmen Sie (ohne Rechnung), wann das Auto 50km/h fährt! b. Bestimmen Sie, wann die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird! c. Berechnen Sie, wie viel km/h das Auto in der 9. Sekunde fährt! d. Berechnen Sie, wann das Auto 85km/h fährt! e. Bestimmen Sie, wann die Geschwindigkeit konstant ist!	a. Nach ungefähr 2 Sekunden, 14 Sekunden und ca. 21,2 Sekunden fährt das Auto 50km/h. b. Nach 24 Sekunden erreicht das Auto seine Höchstgeschwindigkeit. c. $f(9) = 85,32$ Das Auto fährt in der 9. Sekunde 85,32km/h. d. $f(x) = 85$ $\Leftrightarrow 0,08\,x^3 - 3x^2 + 30x = 85$ $\Leftrightarrow 0,08\,x^3 - 3x^2 + 30x - 85 = 0$ $\Leftrightarrow x = 5 \vee x \approx 9,0693 \vee x \approx 23,4307$ (TR oder Polynomdivision) Das Auto fährt in der 5., 9. und in der 23. Sekunde 85km/h. e. In der 7. und in der 18. Sekunde wird nicht beschleunigt.