Lösung zu Einführung der Monotonie

Definition:

Gegeben ist eine auf einem Intervall I definierte Funktion f. $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$.
Dann gilt:

f ist <u>monoton steigend</u> in I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$
f ist <u>streng monoton steigend</u> in I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$
f ist <u>monoton fallend</u> in I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$
f ist <u>streng monoton fallend</u> in I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

Satz:

Eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0$.

Eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$.

Beispiel:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 - 12x + 6$ auf Monotonie!

1. Nullstellen der Ableitung berechnen:

   $f'(x) = 3x^2 - 9x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$

2. Untersuchen, ob die Werte zwischen den Nullstellen positiv oder negativ sind:
   $f'(-2) = 18 \Rightarrow f'(x) > 0$ für $x < -1$
   $f'(0) = -12 \Rightarrow f'(x) < 0$ für $-1 < x < 4$
   $f'(5) = 18 \Rightarrow f'(x) > 0$ für $x > 4$

   Die Funktion ist streng monoton steigen für $x < -1$ und $x > 4$.
   Die Funktion f ist streng monoton fallend für $-1 < x < 4$.