Lösungen zu den Übungen zu uneigentlichen Integralen

1. Berechne – wenn möglich - die folgenden uneigentlichen Integrale!

a. $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{2}{2}x^{-2}\right]_1^{\infty} = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{\infty} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^2}\right) - (-1) =$ **1**

b. $\int_4^{\infty} -4x^{-6}dx = \left[\frac{4}{5}x^{-5}\right]_4^{\infty} = \left[\frac{4}{5\cdot x^5}\right]_4^{\infty} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{4}{5\cdot b^5}\right) - \frac{1}{1280} =$ $\mathbf{-\frac{1}{1280}}$

c. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{-6}{t^5}\,dt = \left[\frac{-6}{-4}t^{-4}\right]_{-\infty}^{-2} = \left[\frac{3}{2\cdot t^4}\right]_{-\infty}^{-2} = \frac{3}{32} - \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\frac{3}{2\cdot b^4}\right) =$ $\mathbf{\frac{3}{32}}$

d. $\int_{-\infty}^{0} \frac{3}{2\cdot(8-4x)^3}\,dx = \left[\frac{3}{-2\cdot(-4)\cdot 2}(8-4x)^{-2}\right]_{-\infty}^{0} = \left[\frac{3}{16\cdot(8-4x)^2}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{3}{128} - \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\frac{3}{16\cdot(8-4b)^2}\right) =$ $\mathbf{\frac{3}{128}}$

e. $\int_0^{\infty} e^{-0,5x}\,dx = \left[\frac{1}{-0,5}e^{-0,5x}\right]_0^{\infty} = \left[\frac{-2}{e^{0,5x}}\right]_0^{\infty} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{-2}{e^{0,5b}}\right) - (-2) =$ **2**

f. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{8}{(\sqrt{6}-2x)^2}\,dx = \left[\frac{8}{-1\cdot(-2)}(\sqrt{6}-2x)^{-1}\right]_{\infty}^{-1} = \left[\frac{4}{\sqrt{6}-2x}\right]_{\infty}^{-1} = \frac{4}{\sqrt{6}+2} - \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{6}-2b}\right) \approx$ $\mathbf{0.899}$

g. $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{2x+6}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+6)\right]_{-2}^{\infty} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(2b+6)\right) - \frac{1}{2}\ln(2) =$ **∞, d.h. das uneigentliche Integral existiert nicht.**

2. Berechne – wenn möglich - die folgenden uneigentlichen Integrale!

a. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{2} - \lim_{b \to 0}(2 \cdot \sqrt{b}) = 2 \cdot \sqrt{2}$

b. $\int_3^6 \frac{2}{\sqrt{8x-24}} dx = \left[\frac{2}{8 \cdot \frac{1}{2}} \cdot (8x-24)^{\frac{1}{2}}\right]_3^6 = \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8x-24}\right]_3^6 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{24} - \lim_{b \to 3}(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8b-24}) \approx 9{,}8$

c. $\int_0^4 (\frac{-8}{\sqrt{-6x+24}} + 2x^2) dx = \left[\frac{-8}{(-6) \cdot \frac{1}{2}} \cdot (-6x+24)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = \left[\frac{8}{3} \cdot \sqrt{-6x+24}\right]_0^4 + \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^4$

$= \lim_{b \to 4}(\frac{8}{3} \cdot \sqrt{-6b+24}) - \frac{8}{3} \cdot \sqrt{24} + \frac{2}{3} \cdot 4^3 \approx 29{,}6$

3. Die Fläche zwischen den Graphen von f(x) = $-\frac{2}{x}$ rotiere im Intervall $[2; \infty[$ um die x-Achse. Untersuche, ob der entstehende Rotationskörper einen endlichen Rauminhalt hat und berechne diesen gegebenenfalls!

$\Pi \cdot \int_2^\infty \left(-\frac{2}{x}\right)^2 dx = \Pi \cdot \int_2^\infty \frac{4}{x^2} dx = \Pi \cdot \left[-4 \cdot x^{-1}\right]_2^\infty = \Pi \cdot \left[\frac{-4}{x}\right]_2^\infty = \Pi \cdot [\lim_{b \to \infty}(\frac{-4}{b}) - (-2)] = \mathbf{2}\Pi$