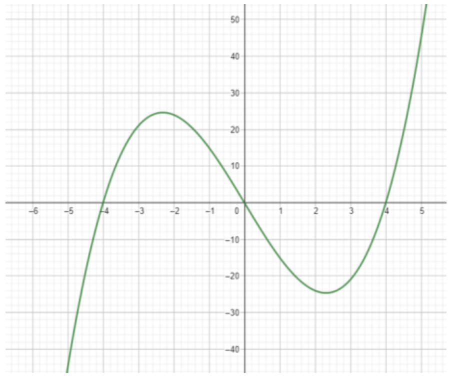
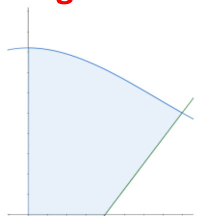
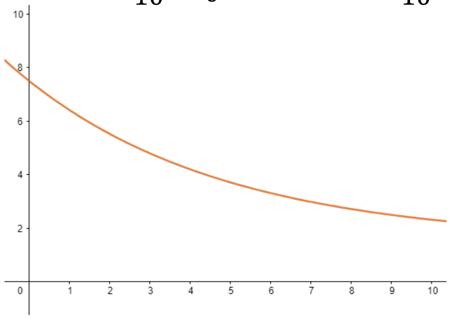
Lösung zur Übungsklausur zur Integralrechnung

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. Berechnen Sie die folgenden Integrale: a. $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 6)dx$ b. $\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x^2} dx$	a. $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 6)dx = [x^3 - x^2 + 6x]_1^4 = 72 - 6 = 66$ b. $\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x^2} dx = \int_{-3}^{-2} 3 \cdot x^{-2} dx = [-3x^{-1}]_{-3}^{-2} = -\frac{3}{-2} - (-\frac{3}{-3})$ $= 1{,}5 - 1 = 0{,}5$	**a. 66** **b. 0,5**
2. Gegeben ist $f(x) = x^3 - 16x$! a. Skizzieren Sie die Funktion! b. Berechnen Sie die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse!	a. $x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4 \vee x = 4$ Nullstellen bei x = −4, x = 0, x = 4 und Funktion dritten Grades mit positivem Faktor vor x^3, d.h. der Graph verläuft von −∞ nach + ∞ und sie ist punktsymmetrisch zu (0/0). b. $A = \int_{-4}^{0} (x^3 - 16x)dx + \left\| \int_0^4 (x^3 - 16x)dx \right\|$ $= \left[\frac{1}{4}x^4 - 8x^2\right]_{-4}^{0} + \left\| \left[\frac{1}{4}x^4 - 8x^2\right]_0^4 \right\|$ $= 64 + \|-64\| = 128$	**a.**  **b.128**
3. Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^3 - 13x + 12$ und der x-Achse!	$x^3 - 13x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = 3$ (polyroots) $A = \left\| \int_{-4}^{1} (x^3 - 13x + 12)dx \right\| + \left\| \int_1^3 (x^3 - 13x + 12)dx \right\|$ $= \left\| \left[\frac{1}{4}x^4 - 6{,}5x^2 + 12x\right]_{-4}^{1} \right\| + \left\| \left[\frac{1}{4}x^4 - 6{,}5x^2 + 12x\right]_1^3 \right\|$ $= \|93{,}75\| + \|-8\| = 101{,}75$	**101,75**
4. Gegeben ist $f(x) = x \cdot (x-1)^2$.	a. $x \cdot (x-1)^2 = x \cdot (x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$	

a. Berechnen Sie die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse im Intervall $[-1;4]$! b. Berechnen Sie den Mittelwert im Intervall $[-1;4]$!	A = $\left\|\int_{-1}^{0} (x^3-2x^2+x)dx\right\| + \int_{0}^{1} (x^3-2x^2+x)dx + \int_{1}^{4} (x^3-2x^2+x)dx$ $= \left\|\left[\frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right\| + \left[\frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{4} \approx \|-1{,}42\| + 0{,}08 + 29{,}25 = 30{,}75$ b. $\bar{m} = \frac{1}{4-(-1)}\cdot\int_{-1}^{4} f(x)dx = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{4} \approx$ 5,58	**a. 30,75** **b. 5,58**
5. Berechnen Sie die Fläche zwischen f(x) = $x^4+4x^3-12x^2-32x+84$ und g(x) = 20!	$x^4+4x^3-12x^2-32x+84 = 20 \Leftrightarrow x^4+4x^3-12x^2-32x+64 = 0 \Leftrightarrow x \approx -4 \vee x \approx 2$ A = $\left\|\int_{-4}^{2} (x^4+4x^3-12x^2-32x+44)dx\right\|$ $=\left\|\left[\frac{1}{5}\cdot x^5+x^4-4x^3-16x^2+44x\right]_{-4}^{2}\right\| =139{,}2$	**139,2**
6. Ein Gartenteich wird durch die beiden Achsen sowie durch die Funktionen f(x) = $\frac{1}{120}x^3-\frac{1}{6}x^2+16{,}4$ und g(x) = 2,5x−10 begrenzt, x und y in Metern. Wie viele Liter Wasser müssen in den Teich eingelassen werden, wenn eine Höhe von 1,2 m erreicht werden soll?	$\frac{1}{120}x^3-\frac{1}{6}x^2+16{,}4 = 2{,}5x-10 \Leftrightarrow \frac{1}{120}x^3-\frac{1}{6}x^2-2{,}5x+26{,}4=0$ $\Leftrightarrow x \approx -14{,}78 \vee x\ 8 \vee x \approx 26{,}78$ g(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 4 A = $\int_{0}^{8} f(x)dx - \int_{4}^{8} g(x)dx$ $= \left[\frac{1}{480}\cdot x^4-\frac{1}{18}x^3+16{,}4x\right]_{0}^{8} - \left[1{,}25x^2-10x\right]_{4}^{8}$ = 111,289−20 = 91,289 91,289m² · 1,2m = 109,547m³ = 109547dm³ = 109547 l	**Es müssen 109.547 Liter eingelassen werden.** 

7. Die Wachstumsrate einer Pflanze wird durch die Funktion $f(x) = 1{,}5 + 6 \cdot e^{-0{,}2x}$ modelliert, x in Jahren, f(x) in Zentimetern. Zu Beginn ist die Pflanze 10cm groß. a. Berechnen Sie f(5) und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang! b. Geben Sie eine Funktion an, die di Höhe der Pflanze angibt und berechnen Sie die Höhe zu Beginn des 7. Jahres! c. Berechnen Sie die durchschnittlich Wachstumsrate in den ersten 10 Jahren!	a. $f(5) \approx 3{,}71$ b. $g(t) = 10 + \int_0^t f(x)dx$ $g(7) = 10 + \left[1{,}5x + \frac{6}{-0{,}2}e^{-0{,}2x}\right]_0^7 = 10 + [1{,}5x - e^{-0{,}2x}]_0^7 \approx 43{,}9$ c. $\overline{m} = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{10} \cdot [1{,}5x - e^{-0{,}2x}]_0^{10} \approx 4{,}09$ 	**a. Zu Beginn des 5. Jahres wächst die Pflanze um 3,71cm pro Jahr.** **b. Die Pflanze ist zu Beginn des 7. Jahres ca. 43,9cm hoch.** **c. Die durchschnittliche Wachstumsrate beträgt 4,09cm pro Jahr.**