# *Lösungen zu den Übungen zu Konfidenzintervallen bei Binomialverteilungen*

| Aufgabe | Rechnung | Lösung |
|---|---|---|
| 1. Bei einem binomialverteilten Zufallsversuch werden 20 Treffer bei 100 Versuchen erzielt.<br>a. Berechnen Sie die dazu passenden Wahrscheinlichkeiten bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4%!<br>b. Beschreiben Sie ein dazu passendes Zufallsexperiment! | a. $20 = 100p \pm 2 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$ /$-100p$/:100<br>$\Leftrightarrow \frac{20}{100} - p = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$<br>$\Leftrightarrow (0{,}2-p)^2 = 4 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{100}$<br>$\Leftrightarrow 0{,}04 - 0{,}4p + p^2 = 0{,}04p - 0{,}04p^2$<br>$\Leftrightarrow 1{,}04p^2 - 0{,}44p + 0{,}04 = 0$<br>$\Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}132 \vee p_2 \approx 0{,}2908$ I = [0,132;0,2908]<br>b. X = Anzahl der gewürfelten Sechsen:<br>$P(X) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \in [0{,}132;0{,}2908]$ | Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0,132 und 0,2908. |
| 2. In einer Bachelorarbeit untersuchen drei Studierende der Biologie Antibiotika resistente Keime im Fleisch. Sie finden in 30% der Fälle solche Keime. Student A hat 10 Stücke, Student B 100 und Student C 1000 Stücke Fleisch untersucht. Berechnen und vergleichen Sie die Konfidenzintervalle (Sicherheitswahrscheinlichkeit 99%)! | n = 10: $p - 0{,}3 = \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{10}} \Leftrightarrow (p-0{,}3)^2 = 2{,}58^2 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{10}$<br>$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}6p + 0{,}09 = 0{,}66564p - 0{,}66564p^2$<br>$\Leftrightarrow 1{,}66564p^2 - 1{,}26564p + 0{,}09 = 0 \Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}0794 \vee p_2 \approx 0{,}6847$<br><br>n = 100: $p - 0{,}3 = \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \Leftrightarrow (p-0{,}3)^2 = 2{,}58^2 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{100}$<br>$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}6p + 0{,}09 = 0{,}066564p - 0{,}066564p^2$<br>$\Leftrightarrow 1{,}066564p^2 - 0{,}666564p + 0{,}09 = 0 \Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}1981 \vee p_2 \approx 0{,}4203$<br><br>n = 1000: $p - 0{,}3 = \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1000}} \Leftrightarrow (p-0{,}3)^2 = 2{,}58^2 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{1000}$<br>$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}6p + 0{,}09 = 0{,}006656p - 0{,}006656p^2$<br>$\Leftrightarrow 1{,}0006656p^2 - 0{,}606656p + 0{,}09 = 0 \Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}259 \vee p_2 \approx 0{,}3472$ | n = 10: [0,0794;0,6847]<br>n = 100: [0,1981;0,4203]<br>n = 1000: [0,259;0,3472]<br>Man erkennt, dass die Konfidenzintervalle mit zunehmender Anzahl der Proben genauer werden.<br>Bei n = 10 kann der gefundene Prozentwert zwischen7,94 und 68,47% extrem stark abweichen, bei n = 1000 liegt er schon zwischen 25,9 und 34,72%. |

| | | |
|---|---|---|
| 3. In einer repräsentativen Wählerbefragung gaben 200 von 720 Wähler an, die Partei X zu wählen.<br><br>a. Bestimmen Sie ein 95%iges Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p der Stimmen für die Partei X.<br><br>b. In der aktuellen Wahl gaben 22% der Wähler ihre Stimme der Partei X. Ist dies mit einer 95%igen Sicherheitswahrscheinlichkeit mit dem Stichprobenereignis vereinbar? | a. $p-\frac{200}{720} = \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{720}}$<br>$\Leftrightarrow (p-\frac{5}{18})^2 = 1{,}96^2 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{720}$<br>$\Leftrightarrow p^2 - \frac{5}{9}p + \frac{25}{324} = 0{,}0053p - 0{,}0053p^2$<br>$\Leftrightarrow 1{,}0053p^2 - 0{,}5609p + \frac{25}{324} = 0$<br>$\Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}246 \vee p_2 \approx 0{,}3117$<br>$I = [0{,}246;0{,}3117]$<br><br>b. $0{,}22 \notin [0{,}246;0{,}3117]$ | Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 24,6 und 31,17%.<br><br>Die Umfrage ist mit dem aktuellen Wahlergebnis nicht vereinbar. |
| 4. Eine Partei F lässt eine Meinungsumfrage unter 1000 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten durchführen. 520 dieser Personen geben an, die Partei F zu wählen. Welche Erfolgswahrscheinlich-keiten sind mit diesem Stichprobenergebnis bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,7% verträglich? Bedeutet dieses Befragungsergebnis, dass die Partei A die nächste Wahl gewinnt? | $p-\frac{520}{1000} = \pm 3 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1000}}$<br>$\Leftrightarrow (p-0{,}52)^2 = 9 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{1000}$<br>$\Leftrightarrow p^2 - 1{,}04p + 0{,}2704 = 0{,}009p - 0{,}009p^2$<br>$\Leftrightarrow 1{,}009p^2 - 1{,}049p + 0{,}2704 = 0$<br>$\Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}473 \vee p_2 \approx 0{,}567$<br><br>$I = [0{,}473;0{,}567]$ | Da die Wahrscheinlichkeit auch unter 0,5 sein kann, ist eine Wahl nicht gewährleistet. |

| | | |
|---|---|---|
| 5. Eine Glühbirnenfabrik Bingo liefert Millionen Glühbirnen an große Handelsketten.<br>a. Die Handelskette A entnimmt einer Lieferung eine Stichprobe von 100 Stück, um die Teile zu überprüfen. 6 der geprüften Teile sind defekt. Berechnen Sie mit einer Sicherheits-wahrscheinlichkeit von 95,4%, mit wieviel Prozent Ausschuss die Handelskette für die gesamte Lieferung rechnen muss!<br>b. Die Handelskette B entnimmt einer Lieferung eine Stichprobe von 1000 Stück, um die Teile zu überprüfen. 60 der geprüften Teile sind defekt. Berechnen Sie mit einer Sicherheits-wahrscheinlichkeit von 95,4%, mit wieviel Prozent Ausschuss die Handelskette für die gesamte Lieferung rechnen muss!<br>c. Bewerten Sie die Ergebnisse! | a. $p-\frac{6}{100} = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$<br>⇔ $(p-0{,}06)^2 = 4 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{100}$<br>⇔ $p^2 - 0{,}12p + 0{,}0036 = 0{,}04p - 0{,}04p^2$<br>⇔ $1{,}04p^2 - 0{,}16p + 0{,}0036 = 0$<br>⇔ $p_1 \approx 0{,}0274 \lor p_2 \approx 0{,}1265$<br>$I = [0{,}0274;0{,}1265]$<br><br>b. $p-\frac{60}{1000} = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1000}}$<br>⇔ $(p-0{,}06)^2 = 4 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{1000}$<br>⇔ $p^2 - 0{,}12p + 0{,}0036 = 0{,}004p - 0{,}004p^2$<br>⇔ $1{,}004p^2 - 0{,}124p + 0{,}0036 = 0$<br>⇔ $p_1 \approx 0{,}0467 \lor p_2 \approx 0{,}0768$<br>$I = [0{,}0467;0{,}0768]$ | Die Handelskette A kann den Umfang der defekten Ware nur zwischen 2,74% und 12,65% einschätzen, die Handelskette B ist mit Prozentzahlen von 4,67 und 7,68 wesentlich genauer, obwohl beide in der Stichprobe ein Ergebnis von 6% Ausschuss erhalten. |
| 6. Im Jahr 2015 gab es in Deutschland 40,8 Millionen Haushalte, davon 1,6 Millionen alleinerziehende Haushalte. Bei einer Befragung von 1000 Haushalten gaben 50 Haushalte an, alleinerziehend zu sein. Bestimmen Sie mit einer 99%igen Sicherheitswahrscheinlichkeit,<br>a. welche Erfolgswahrscheinlichkeiten mit dem Stichprobenergebnis vereinbar sind!<br>b. ob die Umfrage repräsentativ ist. | a. $p-\frac{50}{1000} = \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1000}}$<br>⇔ $(p-0{,}05)^2 = 2{,}58^2 \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{1000}$<br>⇔ $p^2 - 0{,}1p + 0{,}0025 = 0{,}0066p - 0{,}0066p^2$<br>⇔ $1{,}0066p^2 - 0{,}1066p + 0{,}0025 = 0$<br>⇔ $p_1 \approx 0{,}035 \lor p_2 \approx 0{,}0708$ $I=[0{,}035;0{,}0708]$<br><br>b. $\frac{1{,}6Mio}{40{,}8Mio} \approx 0{,}039 \in [0{,}035;0{,}0708]$ | Die gesuchten Erfolgswahrscheinlichkeiten liegen zwischen 3,5 und 7,08%.<br><br>Mit einer 99%igen Wahrscheinlichkeit ist die Umfrage repräsentativ. |