

Übungen zu stochastischen Matrizen 2: Grenzmatrix, Fixvektor und Grenzverteilung

1. Bestimmen Sie, wenn möglich, die Grenzmatrix G!

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 0,15 \\ 0,6 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{29} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^{152} \begin{pmatrix} 1. & 0,666667 & 0 \\ 0. & 1,75162E-46 & 0 \\ 0. & 0,333333 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{30} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^{153} \begin{pmatrix} 0. & 0,333333 & 1 \\ 0. & 8,75812E-47 & 0 \\ 1. & 0,666667 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^{152} \begin{pmatrix} 1. & 0,666667 & 0 \\ 0. & 1,75162E-46 & 0 \\ 0. & 0,333333 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 0,15 \\ 0,6 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}^{152} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 0,15 \\ 0,6 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}^{153} \begin{pmatrix} 0,33758 & 0,33758 & 0,33758 \\ 0,267516 & 0,267516 & 0,267516 \\ 0,394904 & 0,394904 & 0,394904 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,33758 & 0,33758 & 0,33758 \\ 0,267516 & 0,267516 & 0,267516 \\ 0,394904 & 0,394904 & 0,394904 \end{pmatrix}$

2. In einer Kleinstadt gibt es zwei Fitnessstudios. Zum Jahresbeginn gehen 27% regelmäßig in das Fitnessstudio A, 12 % in das Fitnessstudio B und der Rest geht in gar kein Fitnessstudio. Alle Studios machen bei gleichbleibender Teilnehmerzahl Gewinne. Die folgende Übergangstabelle zeigt den Wechsel pro Jahr.

von nach	A	B	N
A	0,45	0,2	0,1
B	0,35	0,55	0,2
N	0,2	0,25	0,7

a. Untersuchen Sie um wieviel Prozent sich der Anteil der Trainierenden, die das Fitnessstudio B benutzen, nach 5 Jahren verändert hat!

b. Untersuchen Sie, ausgehend von der Startverteilung die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und entscheiden Sie begründet, ob es sich lohnt, in das Fitnessstudio B zu investieren!

a. $\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,12 \\ 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,207123 \\ 0,353843 \\ 0,439035 \end{pmatrix}$

$\frac{35,38 \cdot 100}{27} = 131,037$

b. $\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,12 \\ 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,208589 \\ 0,355828 \\ 0,435583 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^{30} \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,12 \\ 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,208589 \\ 0,355828 \\ 0,435583 \end{pmatrix}$

a. Es gibt keine Grenzmatrix.

b. $G = \begin{pmatrix} 0,33758 & 0,33758 & 0,33758 \\ 0,267516 & 0,267516 & 0,267516 \\ 0,394904 & 0,394904 & 0,394904 \end{pmatrix}$

c. Es gibt keine Grenzmatrix.

a. Nach 5 Jahren trainieren 35,38% der Einwohner im Studio B, das sind ca. 31,04% mehr.

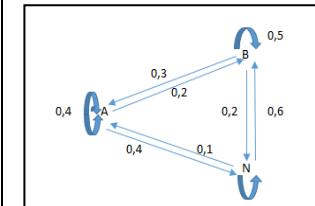
b. Es lohnt sich, in das Fitnessstudio B zu investieren, da langfristig 35,58% der Menschen im Studio B trainieren werden.

3. Der Übergangsgraph gibt das Übergangsverhalten der Menschen pro Monat an, die zwischen den Telefonanbietern A, B und N wechseln. Die Anfangsverteilung der Telefonanbieter ist unbekannt. Berechnen Sie manuell die Anfangsverteilung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so, dass sich die Verteilung nicht mehr verändert!

$$x + y + z = 1 \text{ und } \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{linSolve} \left(\begin{array}{l} 0,4 \cdot x + 0,3 \cdot y + 0,1 \cdot z = x \\ 0,2 \cdot x + 0,5 \cdot y + 0,6 \cdot z = y \\ x + y + z = 1 \end{array}, \{x, y, z\} \right) \\ \{0,270588, 0,447059, 0,282353\}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 0,2706 \quad y \approx 0,4471 \quad z \approx 0,2824$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2706 \\ 0,4471 \\ 0,2824 \end{pmatrix}$$

4. In einem Dorf gibt es zwei Bäckereien und einen Supermarkt. In der Bäckerei A kaufen 27,5% regelmäßig ein, in der Bäckerei B 40 % und 32,5% kaufen im Supermarkt. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Wanderung der Kunden pro Jahr.

von \ nach	A	B	S
A	0,4	0,2	0,1
B	0,15	0,4	0,2
S	0,45	0,4	0,7

- Berechnen Sie, wie viel Prozent der Personen in den ersten 4 Jahren von der Bäckerei B zum Supermarkt wechseln!
- Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechnen Sie den langfristigen Anteil der beiden Bäckereien an dem Brotverkauf!
- Welche Grenzverteilung ergibt sich für die Startverteilung, wenn jeweils 50% in der Bäckerei A und B einkaufen?

a.

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,4 & 0,2 \\ 0,45 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 0,180475 & 0,1805 & 0,1745 \\ 0,236475 & 0,23945 & 0,239475 \\ 0,58305 & 0,58005 & 0,586025 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,4 & 0,2 \\ 0,45 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{21} \begin{bmatrix} 0,275 \\ 0,4 \\ 0,325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,176991 \\ 0,238938 \\ 0,584071 \end{bmatrix}$$

$$0,177 + 0,2389 = 0,4159$$

c.

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,4 & 0,2 \\ 0,45 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{15} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,176991 \\ 0,238938 \\ 0,584071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,4 & 0,2 \\ 0,45 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{20} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,176991 \\ 0,238938 \\ 0,584071 \end{bmatrix}$$

a. In den ersten 4 Jahren wechseln ca. 58 % von der Bäckerei B zum Supermarkt.

b. Langfristig sind 41,59% Kunden in den Bäckereien.

c. Langfristig ist die Verteilung unabhängig vom Startvektor, also die gleiche Verteilung wie in Aufgabe b.

(Da wir eine Matrize haben, deren Werte alle echt positiv sind, gibt es eine Grenzverteilung, die unabhängig vom Startvektor ist.)

5. In einer Stadt gibt es drei Clubs, in denen 40.000 Menschen regelmäßig feiern. Das monatliche Wechselverhalten wird durch die Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,18 & 0,26 \\ 0,45 & 0,54 & 0,33 \\ 0,25 & 0,28 & 0,41 \end{pmatrix}$

beschrieben. Zu Beginn des Jahres feierten 15.000 im Club A, 20.000 im Club B und 5.000 im Club C.

- a. Berechnen Sie die Besucherzahl nach 4 Monaten!
- b. Untersuchen Sie manuell, ob es eine stationäre Verteilung gibt!
- c. Wie lautet die Grenzmatrix G? Geben Sie an, was das Ergebnis in der zweiten Spalte/dritten Zeile im Sachzusammenhang angibt!

a.

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,18 & 0,26 \\ 0,45 & 0,54 & 0,33 \\ 0,25 & 0,28 & 0,41 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 15000 \\ 20000 \\ 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9318,88 \\ 18130,6 \\ 12550,5 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,18 & 0,26 \\ 0,45 & 0,54 & 0,33 \\ 0,25 & 0,28 & 0,41 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und $x + y + z = 40.000$

$$\text{linSolve} \left(\begin{array}{l} \left\{ 0,3 \cdot x + 0,18 \cdot y + 0,26 \cdot z = x \right. \\ \left. 0,45 \cdot x + 0,54 \cdot y + 0,33 \cdot z = y \right. \\ \left. x + y + z = 40000 \right. \end{array}, \{x, y, z\} \right) \\ \{9322,92, 18125, 12552,1\}$$

c.

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,18 & 0,26 \\ 0,45 & 0,54 & 0,33 \\ 0,25 & 0,28 & 0,41 \end{bmatrix}^{500} = \begin{bmatrix} 0,233073 & 0,233073 & 0,233073 \\ 0,453125 & 0,453125 & 0,453125 \\ 0,313802 & 0,313802 & 0,313802 \end{bmatrix}$$

a. Nach 4 Monaten feiern ca. 9319 junge Leute im Club A, 18131 im Club B und 12551 im Club C.

b. Die stationäre Verteilung ist, wenn im Club A 9323, im Club B 18125 und im Club C 12552 Menschen feiern.

c.

$$G \approx \begin{pmatrix} 0,23307 & 0,23307 & 0,23307 \\ 0,45313 & 0,45313 & 0,45313 \\ 0,3138 & 0,3138 & 0,3138 \end{pmatrix}$$

Langfristig wechseln insgesamt 31,38% der Personen vom Club B in den Club C.