Übungen zu stochastischen Matrizen 2: Grenzmatrix, Fixvektor und Grenzverteilung

1. Bestimmen Sie, wenn möglich, die Grenzmatrix G!

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}15 \\ 0{,}6 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

a.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{29} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{30} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{31} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.25 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.15 \\ 0.6 & 0.35 & 0.25 \end{bmatrix}^{152}$$

$$\begin{bmatrix} 0.33758 & 0.33758 & 0.33758 \\ 0.267516 & 0.267516 & 0.267516 \\ 0.394904 & 0.394904 & 0.394904 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.25 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.15 \\ 0.6 & 0.35 & 0.25 \end{bmatrix}^{153}$$

$$\begin{bmatrix} 0.33758 & 0.33758 & 0.33758 \\ 0.267516 & 0.267516 & 0.267516 \\ 0.394904 & 0.394904 & 0.394904 \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^{152} \qquad \begin{bmatrix} 1. & 0.666667 & 0. \\ 0. & 1.75162\text{E}-46 & 0. \\ 0. & 0.333333 & 1. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^{153} \qquad \begin{bmatrix} 0. & 0.333333 & 1. \\ 0. & 8.75812\text{E}-47 & 0. \\ 1. & 0.666667 & 0. \end{bmatrix}$$

a. Es gibt keine Grenzmatrix.

b. G =

$$\begin{pmatrix} 0{,}33758 & 0{,}33758 & 0{,}33758 \\ 0{,}267516 & 0{,}267516 & 0{,}267516 \\ 0{,}394904 & 0{,}394904 & 0{,}394904 \end{pmatrix}$$

c. Es gibt keine Grenzmatrix.

2. In einer Kleinstadt gibt es zwei Fitnessstudios. Zum Jahresbeginn gehen 27% regelmäßig in das Fitnessstudio A, 12 % in das Fitnessstudio B und der Rest geht in gar kein Fitnessstudio. Alle Studios machen bei gleichbleibender Teilnehmerzahl Gewinne. Die folgende Übergangstabelle zeigt den Wechsel pro Jahr.

nach \ von	A	B	N
A	0,45	0,2	0,1
B	0,35	0,55	0,2
N	0,2	0,25	0,7

a. Untersuchen Sie um wieviel Prozent sich der Anteil der Trainierenden, die das Fitnessstudio B benutzen, nach 5 Jahren verändert hat!

b. Untersuchen Sie, ausgehend von der Startverteilung die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und entscheiden Sie begründet, ob es sich lohnt, in das Fitnessstudio B zu investieren!

a. $\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,12 \\ 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,207123 \\ 0,353843 \\ 0,439035 \end{pmatrix}$

$\frac{35,38 \cdot 100}{27} = 131,037$

b. $\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,12 \\ 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,208589 \\ 0,355828 \\ 0,435583 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^{30} \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,12 \\ 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,208589 \\ 0,355828 \\ 0,435583 \end{pmatrix}$

a. Nach 5 Jahren trainieren 35,38% der Einwohner im Studio B, das sind ca. 31,04% mehr.

b. Es lohnt sich, in das Fitnessstudio B zu investieren, da langfristig 35,58% der Menschen im Studio B trainieren werden.

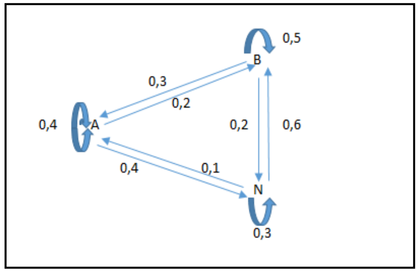
3. Der Übergangsgraph gibt das Übergangsverhalten der Menschen pro Monat an, die zwischen den Telefonanbietern A, B und N wechseln. Die Anfangsverteilung der Telefonanbieter ist unbekannt. Berechnen Sie manuell die Anfangsverteilung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so, dass sich die Verteilung nicht mehr verändert!

x + y + z =1 und $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\text{linSolve}\left(\begin{cases} 0.4\cdot x+0.3\cdot y+0.1\cdot z=x \\ 0.2\cdot x+0.5\cdot y+0.6\cdot z=y \\ x+y+z=1 \end{cases}, \{x,y,z\}\right)$

$\{0.270588, 0.447059, 0.282353\}$

⇔ x ≈ 0,2706 y ≈ 0,4471 z ≈ 0,2824



$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2706 \\ 0,4471 \\ 0,2824 \end{pmatrix}$

4. In einem Dorf gibt es zwei Bäckereien und einen Supermarkt. In der Bäckerei A kaufen 27,5% regelmäßig ein, in der Bäckerei B 40 % und 32,5% kaufen im Supermarkt. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Wanderung der Kunden pro Jahr.

von / nach	A	B	S
A	0,4	0,2	0,1
B	0,15	0,4	0,2
S	0,45	0,4	0,7

a. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Personen nach 3 Jahren im Supermarkt einkaufen!

b. Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechnen Sie den langfristigen Anteil der beiden Bäckereien an dem Brotverkauf!

a.

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.4 & 0.2 \\ 0.45 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.275 \\ 0.4 \\ 0.325 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.182225 \\ 0.238756 \\ \underline{0.579019} \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.4 & 0.2 \\ 0.45 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}^{21} \cdot \begin{bmatrix} 0.275 \\ 0.4 \\ 0.325 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.176991 \\ 0.238938 \\ 0.584071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.4 & 0.2 \\ 0.45 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}^{22} \cdot \begin{bmatrix} 0.275 \\ 0.4 \\ 0.325 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{0.176991} \\ \underline{0.238938} \\ 0.584071 \end{bmatrix}$$

$0,177 + 0,2389 = 0,4159$

a. Nach 3 Jahren kaufen 57,9% der Bewohner ihr Brot im Supermarkt ein.

b. Langfristig sind 41,59% Kunden in den Bäckereien.

5. In einer Stadt gibt es drei Clubs, in denen 40.000 Menschen regelmäßig feiern. Das monatliche Wechselverhalten wird durch die Übergangsmatrix U = $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,18 & 0,26 \\ 0,45 & 0,54 & 0,33 \\ 0,25 & 0,28 & 0,41 \end{pmatrix}$ beschrieben. Zu Beginn des Jahres feierten 15.000 im Club A, 20.000 im Club B und 5.000 im Club C.

a. Berechnen Sie die Besucherzahl nach 4 Monaten!

a.

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.18 & 0.26 \\ 0.45 & 0.54 & 0.33 \\ 0.25 & 0.28 & 0.41 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 15000 \\ 20000 \\ 5000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9318.88 \\ 18130.6 \\ 12550.5 \end{bmatrix}$$

a. Nach 4 Monaten feiern ca. 9319 junge Leute im Club A, 18131 im Club B und 12551 im Club C.

b. Untersuchen Sie, ob es eine stationäre Verteilung gibt! c. Wie lautet die Grenzmatrix G? Geben Sie an, was das Ergebnis in der zweiten Spalte/dritten Zeile im Sachzusammenhang angibt!	b. $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}18 & 0{,}26 \\ 0{,}45 & 0{,}54 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und x + y + z = 40.000 $\text{linSolve}\left(\begin{cases} 0.3\cdot x+0.18\cdot y+0.26\cdot z=x \\ 0.45\cdot x+0.54\cdot y+0.33\cdot z=y \\ x+y+z=40000 \end{cases},\{x,y,z\}\right)$ $\{9322.92,18125.,12552.1\}$ c. $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.18 & 0.26 \\ 0.45 & 0.54 & 0.33 \\ 0.25 & 0.28 & 0.41 \end{bmatrix}^{500}$ $\begin{bmatrix} 0.233073 & 0.233073 & 0.233073 \\ 0.453125 & 0.453125 & 0.453125 \\ 0.313802 & 0.313802 & 0.313802 \end{bmatrix}$	b. Die stationäre Verteilung ist, wenn im Club A 9323, im Club B 18125 und im Club C 12552 Menschen feiern. c. $G \approx \begin{pmatrix} 0{,}23307 & 0{,}23307 & 0{,}23307 \\ 0{,}45313 & 0{,}45313 & 0{,}45313 \\ 0{,}3138 & 0{,}3138 & 0{,}3138 \end{pmatrix}$ Langfristig wechseln insgesamt 31,38% der Personen vom Club B in den Club C.