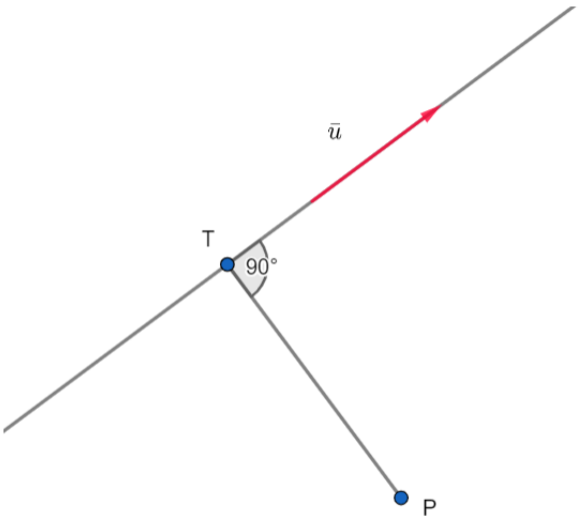
Abstand von Punkt zur Geraden

I. Lotpunktverfahren (Verwendung des Skalarproduktes)
II. Verwendung einer Lotebene
III. Anwendung der Formel

Gegeben ist der Punkt P und die Gerade g: $\bar{x} = \bar{a} + r \cdot \bar{u}$.
Gesucht ist der Abstand zwischen P und g.

I. Lotpunktverfahren



Berechnung durch: Abstand d = $|\overline{PT}|$

Man benutzt das Skalarprodukt: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PT} = 0$.

Beispiel: P (4/−10/ −47) und g: $\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. Berechnen von T:

Da T auf g liegt, gibt es ein s, sodass:

$\bar{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6s \\ 8-3s \\ -1+5s \end{pmatrix}$ also T(−2+6s/8−3s/ −1+5s)

Berechnen von s:

$\overrightarrow{PT} = \begin{pmatrix} -2+6s \\ 8-3s \\ -1+5s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6s \\ 18-3s \\ 46+5s \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{PT} = 0$

$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6+6s \\ 18-3s \\ 46+5s \end{pmatrix} = 0$

⇔ $6 \cdot (-6+6s) + (-3) \cdot (18-3s) + 5 \cdot (46+5s) = 0$

⇔ $-36 + 36s - 54 + 9s + 230 + 25s = 0$

⇔ $70s + 140 = 0$

⇔ $s = -\frac{140}{70} = -2$

[T = $(-2+6 \cdot (-2), 8-3 \cdot (-2) / -1+5 \cdot (-2)) = (-14/\ 14/\ -11)$]

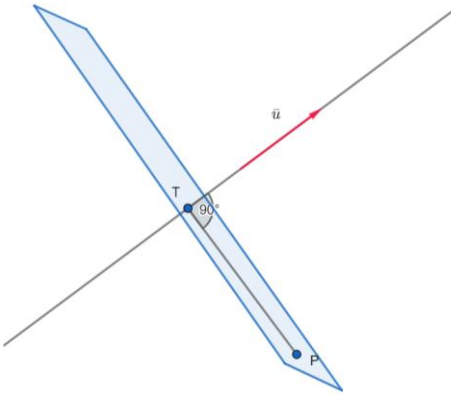
2. Aufstellen von $\overrightarrow{PT}$:

$$\overrightarrow{PT} = \begin{pmatrix} -6+6\cdot(-2) \\ 18-3\cdot(-2) \\ 46+5\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

3. Berechnen von $|\overrightarrow{PT}|$:

$$\left|\begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-18)^2 + (24)^2 + (36)^2} = \sqrt{2196} \approx 46,8615$$

II. Lotebene



Berechnung durch: Schnittpunkt einer Ebene mit der Geraden

Man benutzt: Der Normalenvektor der Lotebene ist der Richtungsvektor der Geraden.

Beispiel: P (4/−10/ −47) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. Aufstellen der Lotebene in Koordinatenform:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ E: $6x_1 - 3x_2 + 5x_3 =$ d

Einsetzen der Punktes P in E:

$6 \cdot 4 + (-3) \cdot (-10) + 5 \cdot (-47) =$ d ⇔ d $= 24 + 30 - 235 = -181$

E: $6x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -181$

2. Schnittpunkt von Gerade und Ebene bestimmen:

$6 \cdot (-2 + 6r) + (-3) \cdot (8 - 3r) + 5 \cdot (-1 + 5r) = -181$

⇔ − 12 + 36r −24 + 9r −5 + 25 r = -181

⇔ 70r − 41 = -181 ⇔ r $= -\frac{140}{70} = -2$

⇨ $\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ -11 \end{pmatrix}$

3. Aufstellen von $\overrightarrow{PT}$:

$$\overrightarrow{PT} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

4. Berechnen von $|\overrightarrow{PT}|$:

$$\left|\begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-18)^2 + 24^2 + 36^2} \approx 46{,}8615$$

III. Formel:

$$d = \frac{|(\bar{p}-\bar{a})\times\bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

Beispiel: P (4/−10/ −47) und g: $\bar{x} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\5\end{pmatrix}$

$$\bar{p}-\bar{a} = \begin{pmatrix}4\\-10\\-47\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\8\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-18\\-46\end{pmatrix}$$

$$(\bar{p}-\bar{a})\times\bar{u} = \begin{pmatrix}6\\-18\\-46\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-18)\cdot 5-(-46)\cdot(-3)\\(-46)\cdot 6-6\cdot 5\\6\cdot(-3)-(-18)\cdot 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-228\\-306\\90\end{pmatrix}$$

$$|(\bar{p}-\bar{a})\times\bar{u}| = \left|\begin{pmatrix}-228\\-306\\90\end{pmatrix}\right| = \sqrt{228^2+306^2+90^2} = \sqrt{153720}\ (\approx 392{,}97)$$

$$|\bar{u}| = \left|\begin{pmatrix}6\\-3\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+3^2+5^2} = \sqrt{70}\ (\approx 8{,}367)$$

$$d = \frac{\sqrt{153720}}{\sqrt{70}} \approx 46{,}8615$$