Lösung zum Rechnen mit Vektoren 2

1. Suchen Sie Zahlen r, s ∈ $\mathbb{R}^{\neq 0}$, so dass der Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ geschrieben werden kann, d.h. $\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$!

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{l} 4 = 2r - 5s \\ 3 = 3r - 9s \\ -2 = \frac{2}{7}r - 2s \end{array} \right| \xrightarrow{\cdot(-1{,}5)} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -6 = -3r + 7{,}5s \\ \underline{\;\;3 = \;\;3r \;- 9s} \\ -3 = \;\;\;\;\;\; -1{,}5s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -2 = \frac{2}{7}r - 2s \\ 3 = 3r - 9 \cdot 2 \Rightarrow r = 7 \\ s = 2 \end{array}$$

Überprüfen in der noch nicht benutzten Gleichung (unbedingt notwendig!):

$-2 = \frac{2}{7} \cdot 7 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow -2 = 2 - 4$ √

d.h. $\vec{a} = 7\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$

b. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{l} 2 = -3r - 7s \\ 2 = 4r + 7s \\ 4 = \;8r + 14s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 4 = r \\ 2 = 4 \cdot 4 + 7s \\ 4 = \;8r + 14s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 4 = r \\ s = -2 \\ 4 = \;8 \cdot 4 + 14 \cdot (-2) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 4 = r \\ s = -2 \\ 4 = \;32 - 28 \end{array} \right|$$

d.h. $\vec{a} = 4\,\vec{b} - 2\,\vec{c}$

c. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{l} -9 = 5r + 24s \\ 9 = -6r - 9s \\ -12 = \;-4r \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} -9 = 5r + 24s \\ 9 = -6 \cdot 3 - 9s \\ r = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -9 = 5 \cdot 3 + 24 \cdot (-3) \\ s = -3 \\ r = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -9 = -57 \; falsch \\ s = -3 \\ r = 3 \end{array}$$

d.h. es gibt keine Zahlen, der Vektor $\vec{a}$ kann <u>nicht</u> als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ geschrieben werden

d. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{15}{6} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{l} 7 = r - 2s \\ 5 = 2r - \frac{15}{6}s \\ -9 = \;3r - s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -21 = -3r + 6s \\ 5 = 2r - \frac{15}{6}s \\ -9 = \;3r - s \end{array} \right| -30 = 5s \Leftrightarrow s = -6 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -21 = -3r + 6s \\ 5 = 2r - \frac{15}{6} \cdot (-6) \\ s = -6 \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} -21 = -3 \cdot (-5) + 6 \cdot (-6) \\ r = -5 \\ s = -6 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -21 = 15 - 36 \; \surd \\ r = -5 \\ s = -6 \end{array} \right|$$

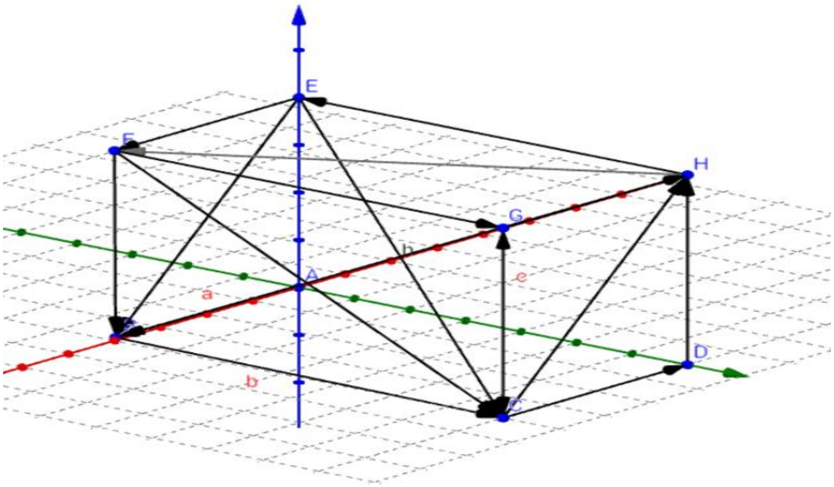
d.h. $\vec{a} = -5\,\vec{b} - 6\,\vec{c}$

2. Drücken Sie die Strecken $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{EC}$ $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{EB}$ und $\overrightarrow{HF}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

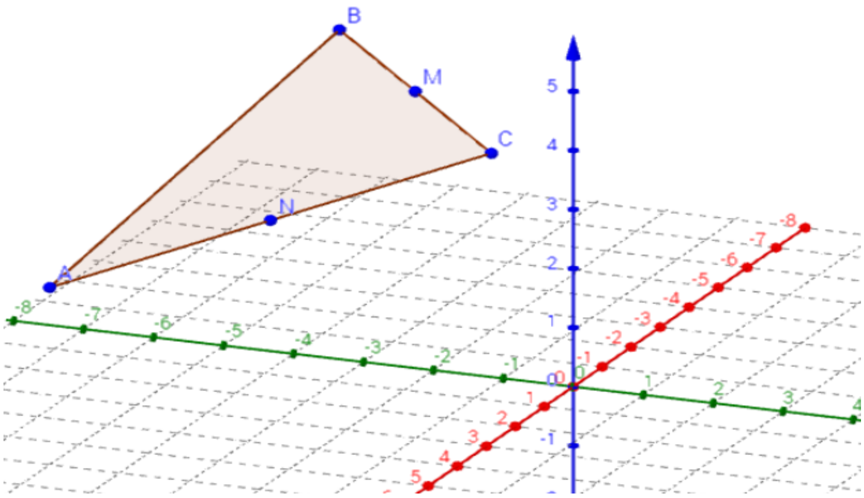
$\overrightarrow{FC} = -\vec{c} + \vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CH} = -\vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{EC} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BH} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{EB} = -\vec{c} + \vec{a}$ $\qquad$ $\overrightarrow{HF} = -\vec{b} + \vec{a}$



3. Gegeben ist A(6/ −5/3), B(−4/ −5/4) und C(−2/ −2/3).
   a. Berechnen Sie die Strecken $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$!
   b. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{BC}$ und N der Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{AC}$. Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M und N!
   c. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks!



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0C} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{0N} = \overrightarrow{0A} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$ M(−3/−3,5/3,5) und N(2/−3,5/3)*

Schwerpunkt: $\vec{s} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -9 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

*Abkürzung bei Mittelpunkten:

Mittelpunkt zwischen der Strecke $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0C} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{c} + 0{,}5\,(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{c} + 0{,}5\,\vec{b} - 0{,}5\vec{c} = 0{,}5\,\vec{b} + 0{,}5\vec{c} = 0{,}5\,(\vec{b} + \vec{c})$

Also: $\overrightarrow{0M} = 0{,}5\left[\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0{,}5\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$