Übungen fürs Abitur: Binomialverteilungen

Eine Firma stellt Masken in Massenproduktion her. Jede Maske ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% fehlerhaft. Pro Tag werden 50.000 Masken produziert. Es wird angenommen, dass die Anzahl der fehlerhaften Masken binomialverteilt sei.

a. Mit wie vielen fehlerhaften Masken muss man pro Tag rechnen?

b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass pro Tag
   i. höchstens 4200 fehlerhaft sind.
   ii. genau 4000 fehlerhaft sind.
   iii. zwischen 2000 und 4000 Masken fehlerhaft sind.

c. Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der fehlerhaften Masken um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht?

d. Wie viele Masken muss man mindestens untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96 Prozent mindestens eine fehlerhafte Maske zu finden?

e. Wie viele Masken muss man mindestens untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96 Prozent mindestens zwei fehlerhafte Masken zu finden?

f. Ein potentieller Käufer misstraut den Angaben des Herstellers und befürchtet, dass mehr als 8% der Masken fehlerhaft sind. Er erhält daher eine Probe von 500 Masken. Bei der Prüfung der Masken sind 50 fehlerhaft. Beurteilen Sie mithilfe der 2σ-Regel, ob das Misstrauen berechtigt ist.

g. Die Firma verspricht der Produktionsleiterin einen Bonus, wenn sie die Rate auf 6 % senkt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 400 Masken entnommen. Wenn sich darunter höchstens 25 fehlerhafte Masken befinden, wird der Bonus gewährt.
   i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält die Produktionsleiterin den Bonus, obwohl sich die Fehlerrate nicht verbessert hat?
   ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie keinen Bonus, obwohl der Anteil der fehlerhaften Masken auf 6% gesunken ist?

h. Eine Apotheke erhält 48 Masken. Sie nimmt aber 50 Bestellungen entgegen, weil aus Erfahrung 10% der Bestellungen storniert werden.
   i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden zu viele Buchungen angenommen?
   ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war sogar mehr als eine Maske übrig?

Lösung:

a. X = Anzahl der fehlerhaften Masken, binomialverteilt
50.000 · 0,08 = 4.000

Man muss mit 4000 fehlerhaften Masken pro Tag rechnen.

b. n = 50.000 p = 0,08
i. $P(X \leq 4200) \approx 0{,}9995$ also 99,95%
ii. $P(X = 4000) \approx 0{,}0065$ also 0,65%
$P(2000 \leq X \leq 4000) \approx 0{,}5042$ also 50,42%

c. $\mu = 4.000$ $\sigma = \sqrt{50.000 \cdot 0.08 \cdot 0{,}92} \approx 60{,}66$
$\mu - \sigma = 3.939{,}34$ $\mu + \sigma = 4.060{,}66$
$P(3940 \leq X \leq 4060) \approx 0{,}6814$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 68,14%.

d. $1 - P(X = 0) \geq 0{,}96$
$1 - 0{,}92^n \geq 0{,}96$
$0{,}04 \geq 0{,}92^n$
$\ln(0{,}04) \geq \ln(0{,}92^n)$
$\ln(0{,}04) \geq n \cdot \ln(0{,}92)$
$n \geq \frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}92)} \approx 38{,}6$

Man muss mindestens 39 Masken untersuchen.

e. $1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \geq 0{,}96$
$1 - 0{,}92^n - \binom{n}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{n-1} \geq 0{,}96$
$1 - 0{,}92^n - n \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{n-1} \geq 0{,}96$
$0{,}04 \geq 0{,}92^n + n \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{n-1}$
$n \geq 60{,}62$

nSolve$\left(0.04=(0.92)^n+n\cdot 0.08\cdot (0.92)^{n-1},n,0\right)$
60.6238

Man muss mindestens 61 Masken untersuchen.

f. n = 500 p = 0,08
$\mu = 40$
$\sigma = \sqrt{500 \cdot 0.08 \cdot 0{,}92} \approx 6{,}07 > 3$
(LaPlace Bedingung ist erfüllt)
$\mu - 2\sigma = 27{,}86$
$\mu + 2\sigma = 52{,}14$
$50 \in [28; 52]$
Das Misstrauen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4% nicht gerechtfertigt.

g. i. n = 400 p = 0,08

$P(X \leq 25) \approx 0{,}1128$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Bonus erhält, beträgt 11,28%.

ii.n = 400 p = 0,06

$P(X > 25) \approx 0{,}3656$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie keinen Bonus erhält, beträgt 36,56%.

h. X = Anzahl der tatsächlich abgeholten Bestellungen

n = 50   p = 0,9

i. $P(X > 48) \approx 0{,}03379$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 3,38% können nicht alle Bestellungen geliefert werden.

ii. $P(0 \leq X \leq 46) \approx 0{,}7497$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 74,97% war sogar mehr als eine Maske übrig.