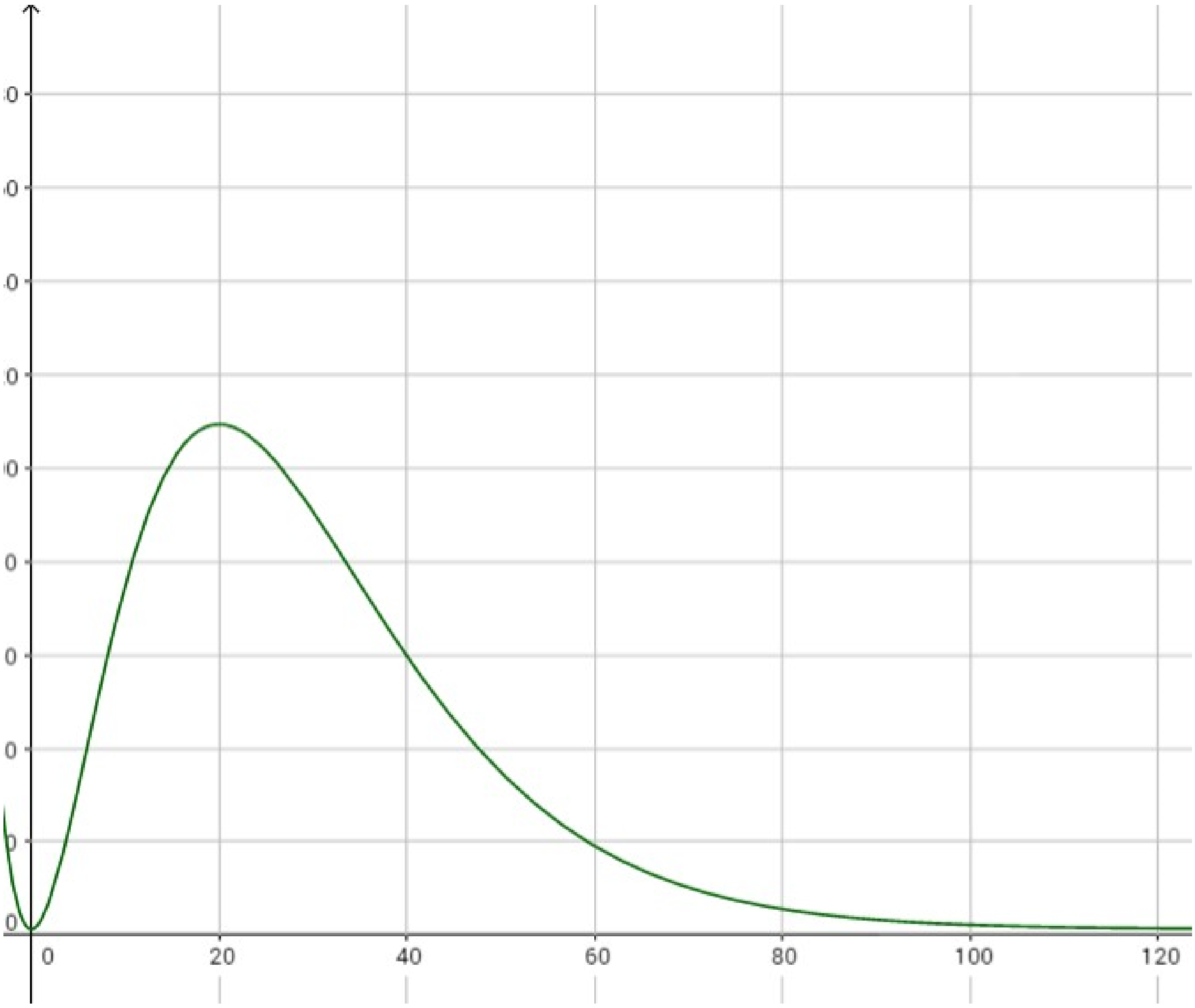
Übungsaufgabe für das Abitur: e-Funktionen

Durch die Funktion $f(t) = 1 + 2t^2 \cdot e^{-0,1t}$ wird das Wachsen eines Bakteriums in der ersten Stunde in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten angegeben, $0 \leq t \leq 60$.



a. Wie viele Bakterien sind nach 10 Minuten vorhanden?
b. Berechnen Sie, wann es die meisten Bakterien gibt!
c. Berechnen Sie, wann das Bakterium das geringste Wachstum hat!
d. Zeigen Sie, dass $F(t) = (-20t^2 - 400t - 4000) \cdot e^{-0,1t} + t$ eine Stammfunktion von f ist! Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der Bakterien in den ersten 50 Minuten!

Lösung:

a. $f(10) \approx 74{,}57$
Nach 10 Minuten sind 74 Bakterien vorhanden.

b. $f'(t) = 4t \cdot e^{-0{,}1t} + 2t^2 \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1t} = e^{-0{,}1t} \cdot (4t - 0{,}2t^2)$ mit Ketten- und Produktregel
notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$
$\Leftrightarrow e^{-0{,}1t} \cdot (4t - 0{,}2t^2)$ ein Produkt ist 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist
$\Leftrightarrow e^{-0{,}1t} = 0 \lor 4t - 0{,}2t^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t} \neq 0 \lor t = 0 \lor t = 20$

$f''(t) = (0{,}02t^2 - 0{,}8t + 4) \cdot e^{-0{,}1t}$ (analog zu b)
notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(t) = 0$ und $f''(x) < 0$:
$f''(0) = 4$
$f''(20) = -0{,}54 < 0 \Rightarrow$ Maximum
$f(20) \approx 109{,}27$

[Ränder: $f(0) = 1 < 109{,}27$, $f(60) \approx 18{,}85 < 109{,}27$]
Nach 20 Minuten gibt es die meisten Bakterien!

c. notwendige Bedingung: $f''(t) = 0$
$\Leftrightarrow \quad (0{,}02t^2 - 0{,}8t + 4) \cdot e^{-0{,}1t} = 0$
$\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}1t} = 0 \lor 0{,}02t^2 - 0{,}8t + 4 = 0$
$\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}1t} \neq 0 \quad t \approx 5{,}85 \lor t \approx 34{,}14$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(t) = 0$ und $f'''(t) > 0$:
$f'''(t) = (-0{,}002t^2 + 0{,}12t - 1{,}2) \cdot e^{-0{,}1t}$ (analog zu b)
$f'''(5{,}85) \approx -0{,}31 < 0 \Rightarrow$ maximale Steigung
$f'''(34{,}14) \approx 0{,}01 > 0 \Rightarrow$ minimale Steigung
$f'(34{,}14) \approx -3{,}18$

[Ränder:; $f'(0) = 1 > -3{,}18$, $f'(60) \approx 18{,}85 > -3{,}18$]

Nach 34,14 Minuten ist das Wachstum am geringsten.

d. $F(t) = (-20t^2 - 400t - 4000)\, e^{-0{,}1t} + t$

zu zeigen: $F'(t) = f(t)$:
$F'(t) = (-40t - 400) \cdot e^{-0{,}1t} + (-20t^2 - 400t - 4000) \cdot e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1) + 1$
$= e^{-0{,}1t} \cdot (-40t - 400 + 2t^2 + 40t + 400) + 1$
$= 1 + 2t^2 \cdot e^{-0{,}1t} = f(t)$

$\frac{1}{50} \cdot \int_0^{50} f(t)dt = \frac{1}{50} \cdot [F(t)]_0^{50} = \frac{1}{50} \cdot [F(50) - F(0)]$
$= \frac{1}{50} \cdot [-448{,}60 - (-4000)] \approx 71{,}02$

Es sind durchschnittlich ca. 71 Bakterien vorhanden.