Lösung zu den Textaufgaben mit Ableitungen 2

1. Eine Firma führt genmanipulierte Orangen in den Markt ein. Die Funktion $f(x) = -x^3 + 12x^2 + 4x - 48$ modelliert den Gewinn/Verlust der Firma, x in Monaten mit $0 \leq x \leq 12$, f(x) in 1.000€.

Aufgabe	mögliche Aufgabenstellung	Lösung
a. Es wird nach einem bestimmten x-Wert gefragt.	Nach wie vielen Monaten macht das Unternehmen 150.000€ Gewinn?	$f(x) = 150 \Leftrightarrow -x^3 + 12x^2 + 4x - 48 = 150$ $\Leftrightarrow -x^3 + 12x^2 + 4x - 198 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx -3{,}68 \vee x \approx 5{,}06 \vee x \approx 10{,}62$ Nach ca. 5,06 und 10,62 Monaten macht das Unternehmen 150.000 € Gewinn.
b. Es wird nach den Nullstellen gefragt.	Nach wie vielen Monaten macht das Unternehmen zum ersten Mal Gewinn?	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 12$ Nach 2 Monaten macht das Unternehmen zum ersten Mal Gewinn.
c. Es wird nach einem bestimmten y-Wert gefragt.	Wie viel Gewinn/Verlust macht das Unternehmen nach 6 Monaten?	$f(6) = 192$ Nach 6 Monaten macht das Unternehmen einen Gewinn von 192.000 €.
d. Es wird nach dem Schnittpunkt mit der y-Achse gefragt.	Welchen Gewinn/Verlust macht das Unternehmen zu Beginn der Einführung?	$f(0) = -48$ Zu Beginn macht das Unternehmen einen Verlust von 48.000€.
e. Es wird nach dem Extremum gefragt.	Wann macht die Firma den meisten Gewinn? Berechnen Sie den Gewinn!	$f'(x) = -3x^2 + 24x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \approx -0{,}16 \vee x \approx 8{,}16$ $f''(x) = -6x + 24 \quad f''(8{,}16) = -24{,}96$ $f(8{,}16) = 240{,}329$ [Ränder: $f(0) = -48$, $f(12) = 0$] Nach ca. 8,16 Monaten macht das Unternehmen mit 240.329€ den meisten Gewinn.
f. Es wird dem Wendepunkt gefragt.	Nach wie vielen Monaten steigert sich der Gewinn am meisten?	$f''(x) = -6x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ $f'''(x) = -6 \quad f'''(4) = -6 < 0$ Nach 4 Monaten steigert sich der Gewinn am meisten.

g. Es wird nach der mittleren Änderungsrate gefragt.	Um wieviel €/pro Monat steigt der Gewinn durchschnittlich zwischen dem 3. und dem 5. Monat?	$\frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{147-45}{2} = 51$ Der Gewinn steigt durchschnittlich um 51.000 € pro Monat.
h. Es wird nach einer bestimmten Tangente gefragt!	Nach 10 Monaten sinkt der Gewinn der Firma linear. Berechnen Sie, wann die Firma dann Verlust macht!	$f(10) = 192 \quad f'(10) = -56$ $t(x) = -56x + b$ $192 = -56 \cdot 10 + b \Leftrightarrow b = 752$ $t(x) = -56x + 752$ $t(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{752}{56} \Leftrightarrow x \approx 13{,}43$ Die Firma macht dann nach ca. 13,43 Monaten Verlust.

2. Ein Eisverkäufer richtet sich mit seinen Bestellungen nach der Temperatur des Tages, da aus Erfahrung an heißen Tagen mehr Eis konsumiert wird. Die Funktion $f(x) = -0{,}0001x^4 + 0{,}0102x^3 - 0{,}34x^2 + 3{,}84x + 18{,}6$ modelliert die Temperatur, x in Tagen mit $0 \leq x \leq 50$, f(x) in °C.

Aufgabe	Rechnung	Lösung
a. Wenn die Temperatur am stärksten fällt, muss der Eisverkäufer weniger Vorräte einkaufen. Berechnen Sie den Zeitpunkt!	Gesucht: Wendepunkt mit minimaler Steigung $f(x) = -0{,}0001x^4 + 0{,}0102x^3 - 0{,}34x^2 + 3{,}84x + 18{,}6$ $f'(x) = -0{,}0004x^3 + 0{,}0306x^2 - 0{,}68x + 3{,}84$ $f''(x) = -0{,}0012x^2 + 0{,}0612x - 0{,}68$ $f'''(x) = -0{,}0024x + 0{,}0612$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 16{,}36 \vee x \approx 34{,}64$ $f'''(16{,}36) \approx 0{,}022 > 0$ => minimale Steigung $f'''(34{,}64) \approx -0{,}022 < 0$ => max. Steigung $f'(16{,}36) = -0{,}846$ [Bemerkung: der rechte Rand hat zwar absolut eine kleinere Steigung, ist für die Aufgabe aber irrelevant]	Der Eisverkäufer muss nach ca. 16,36 Tagen weniger Vorräte einkaufen.

b.	Wenn die Temperatur am höchsten ist, macht er am meisten Gewinn. Berechnen Sie den Zeitpunkt!	gesucht: Maximum $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 8{,}6 \vee x \approx 27{,}9 \vee x = 40$ $f''(8{,}6) \approx -0{,}24 < 0 \Rightarrow$ HP $f(8{,}6) \approx 32{,}42$ $f''(27{,}9) \approx 0{,}09 > 0 \Rightarrow$ TP $f''(40) \approx -0{,}152 < 0 \Rightarrow$ HP $f(40) \approx 25$ [Ränder: $f(0) = 16{,}8$; $f(50) = 10{,}6$]	Nach 8,6 Tagen ist der Gewinn am größten.
c.	Berechnen Sie die Temperatur nach 2 Wochen!	$f(14) \approx 29{,}87$	Nach 2 Wochen beträgt die Temperatur 29,87°C.
d.	Berechnen Sie, um wieviel die Temperatur zu Beginn des 4. Tages steigt!	$f'(4) \approx 1{,}58$	Die Temperatur steigt um 1,58°C.
e.	Berechnen Sie den durchschnittlichen Temperatur-anstieg zwischen dem Beginn des 2. und des 6. Tages!	$\frac{f(6)-f(2)}{6-2} \approx \frac{31{,}47-25}{4} \approx 1{,}62$	Der durchschnittliche Temperaturanstieg beträgt 1,62°C pro Tag.
f.	Zeigen Sie, dass die Temperatur zwischen dem 10. und der 20. Tag fällt!	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 8{,}6 \vee x \approx 27{,}9 \vee x = 40$ $f'(15) = -0{,}825 < 0 \Rightarrow$ f ist streng monoton fallend für $8{,}6 < x < 27{,}9$ also auch für $10 < x < 20$.	
g.	Wenn die Temperatur dann wieder steigt, kann der Eisverkäufer wieder mit mehr Umsatz rechnen. Berechnen Sie den Zeitpunkt!	gesucht: Minimum s. Nr.b: das Minimum ist bei 27,9	Nach 27,9 Tagen steigt der Umsatz wieder an.
h.	Wenn die Temperaturen über 24 Grad sind, macht der Eisladen aus Erfahrung Gewinn. Berechnen Sie, wann dies der Fall ist!	$f(x) = 24$ $\Leftrightarrow -0{,}0001x^4 + 0{,}0102x^3 - 0{,}34x^2 + 3{,}84x + 18{,}6 = 24$ $\Leftrightarrow -0{,}0001x^4 + 0{,}0102x^3 - 0{,}34x^2 + 3{,}84x - 5{,}4 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 1{,}63 \vee x \approx 21{,}5 \vee x \approx 35{,}64 \vee x \approx 43{,}23$ $f(8{,}6) = 32{,}42 > 24$ $f(30) = 22{,}2 < 24$ $f(40) = 25 < 24$	Zwischen dem 1,63.ten und 21,5.ten Tag und zwischen dem 35.64.ten und dem 43,23.ten Tag macht der Eisladen Gewinn. (Ungefähr zwischen dem 2. und 21. und zwischen dem 36. und 43. Tag)