Übungen für den 1. Teil des Abiturs ohne Taschenrechner: Analysis

Teil II: e-Funktionen

Aufgaben	Lösungen
1. Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung f(x) = $e^{0,5x} - e^2$. a. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. b. Zeigen Sie, dass f(2) < 0 ist. c. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird. d. Zeigen Sie, dass f'(0) = 0,5 ist. e. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x = 2.	a. $e^{0,5x} - e^2 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = e^2 \Leftrightarrow 0,5x = 2 \Leftrightarrow x = 4$ b. $f(2) = e^1 - e^2 < 0$, da die Zahl e > 1 ist. c. $A = \left\|\int_0^4 (e^{0,5x} - e^2)dx\right\| = \|[2e^{0,5x} - e^2x]_0^4\|$ $= \|2e^2 - 4e^2 - (2e^0 - 0)\| = \|-2e^2 - 2\| = 2e^2 + 2$ d. $f'(x) = 0,5 \cdot e^{0,5x}$ (Kettenregel) $f'(0) = 0,5 \cdot e^0 = 0,5$ √ e. $y = mx + b$ $m = f'(2) = 0,5 \cdot e^1 \Rightarrow y = 0,5 \cdot e^1 \cdot x + b$ $f(2) = e^1 - e^2$ einsetzen: $e^1 - e^2 = 0,5 \cdot e^1 \cdot 2 + b \Leftrightarrow e^1 - e^2 = e^1 + b \Leftrightarrow b = -e^2 \Rightarrow y = 0,5 \cdot e^1 \cdot x - e^2$
2. Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung f(x) = $10x \cdot e^{3x+1}$. a. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion. b. Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen. c. Bestimmen Sie die Extremstellen. Begründen Sie, dass der Tiefpunkt ein absolutes Minimum ist. d. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes. (Auf die hinreichende Bedingung kann verzichtet werden.)	a. $10x \cdot e^{3x+1} = 0 \Leftrightarrow 10x = 0 \vee e^{3x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, da $e^{3x+1} \neq 0$ b. $f'(x) = 10 \cdot e^{3x+1} + 10x \cdot 3e^{3x+1} = (30x + 10) \cdot e^{3x+1}$ $f''(x) = 30 \cdot e^{3x+1} + (30x + 10) \cdot 3e^{3x+1} = (30 + 90x + 30) \cdot e^{3x+1} = (90x + 60) \cdot e^{3x+1}$ c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (30x + 10) \cdot e^{3x+1} \Leftrightarrow 30x + 10 = 0 \vee e^{3x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$, da $e^{3x+1} \neq 0$ $f''(-\frac{1}{3}) = (-30 + 60) \cdot e^{-1+1} = 30 > 0 \Rightarrow$ TP Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (vom Negativen kommend), ist der TP ein absolutes Minimum. d. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (90x + 60) \cdot e^{3x+1} = 0$ $\Leftrightarrow 90x + 60 = 0 \vee e^{3x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$, da $e^{3x+1} \neq 0$ $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{20}{3}e^{-1}$ WP$(-\frac{2}{3} / -\frac{20}{3e})$

3. Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = x \cdot (2x-8) \cdot e^x = (2x^2 - 8x) \cdot e^x$. a. Bestimmen Sie die Nullstellen! b. Weisen Sie nach, dass $F(x) = (2x^2-12x + 12) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. c. Ermitteln Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse eingeschlossen wird. (Sie können $e^4 \approx 54{,}6$ benutzen.)	a. $x \cdot (2x-8) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 8 = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$, da $e^x \neq 0$ b. $F'(x) = (4x-12) \cdot e^x + (2x^2 - 12x + 12) \cdot e^x = (4x-12 + 2x^2 - 12x + 12) \cdot e^x$ $= (2x^2 - 8x) \cdot e^x = f(x)$ c. $\int_0^4 f(x)dx = F(4) - F(0) = (32-48+12) \cdot e^4 - 12 \cdot e^0 = -4 \cdot e^4 - 12$ $\approx -4 \cdot 54{,}6 - 12 = -218{,}4 - 12 = -230{,}4$ Der Flächeninhalt beträgt 230,4 FE.
4. Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x} + 2x + 4$ und $g(x) = 2x$. a. Zeigen Sie, dass f und g keine gemeinsamen Schnittpunkte haben. b. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen f und g, der y-Achse und der parallel zur y-Achse verlaufenden Geraden mit der Gleichung $x = -1$ eingeschlossen wird. c. Prüfen Sie, ob die Gerade h mit $h(x) = x + 4$ eine Tangente an f im Punkt P(0/f(0)) ist.	a. $e^{-x} + 2x + 4 = 2x \Leftrightarrow e^{-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = -4$ geht nicht, da $e^{-x} > 0$ b. $A = \left\|\int_{-1}^{0} (e^{-x} + 4)dx\right\| = \|[-e^{-x} + 4x]_{-1}^{0}\|$ $= \|-e^0 - (-e^1 - 4)\| = \|-1 + e^1 + 4\| = 3 + e$ c. $f(0) = e^0 + 4 = 5$ P(0/5) $f'(x) = -e^{-x} + 2$ $f'(0) = -1 + 2 = 1$ $t(x) = 1 \cdot x + b$ P(0/5) einsetzen: $5 = 0 + b$ $\Rightarrow t(x) = x + 5 \neq h(x)$ h(x) ist nicht die gesuchte Tangente.