Lösung zur Übungsklausur zu exponentiellen Funktionen und e-Funktionen

Runden Sie auf 2 Stellen hinter dem Komma!

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
   a. $3^x = 14.348.907$ ⇔ $x = \log_3(14348907) = 15$
   b. $0{,}7^x = 0{,}117649$ ⇔ $x = \log_{0,7}(0{,}117649) = 6$
2. Die Neuinfektionen entwickeln sich in Deutschland exponentiell. Am Mittwoch, den 14.10.2020 gab es 5861 Neuinfektionen, am Mittwoch, den 21.10.2020 waren es schon 11287.

a. Stellen Sie eine exponentielle Funktion auf, die die Anzahl der Neuinfektionen beschreibt. Legen Sie dar, was x und f(x) sind. Im Folgenden gehen Sie davon aus, dass die Ansteckungsrate so bleiben würde.

$$\frac{11.287}{5861} = 1{,}92578 \approx 1{,}93$$

$f(x) = 11.287 \cdot 1{,}93^x$; x = Wochen, f(x) = Neuinfektionen

b. Berechnen Sie die Anzahl der Neuinfektionen in 6 Wochen (am 2. Dezember 2020).

$f(6) = 583341$

In 6 Wochen hätte man 583.341 Neuinfektionen pro Tag.

c. Frau Merkel befürchtet eine Neuinfektion von 19.200 Menschen pro Tag an Weihnachten. Berechnen Sie, wann diese Zahl der Neuinfektionen erreicht wird!

$11.287 \cdot 1{,}93^x = 19.200 \Leftrightarrow 1{,}93^x = \frac{19.200}{11.287} \Leftrightarrow x = \log_{1,93}(\frac{19.200}{11.287}) \approx 0{,}807$

Man würde dies Zahl schon innerhalb einer Woche erreichen.

3. Gegeben ist $f(x) = (5x^2 - 8) \cdot e^{2x+4}$. Berechnen Sie die Extrema, Wendepunkte und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

$f'(x) = (10x^2 + 10x - 16) \cdot e^{2x+4}$

$f''(x) = (20x^2 + 40x - 22) \cdot e^{2x+4}$

$f'''(x) = (40x^2 + 120x - 4) \cdot e^{2x+4}$

Extrema:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^2 + 10x - 16 = 0 \vee e^{2x+4} = 0$

$\Leftrightarrow x \approx -1{,}86 \vee x \approx 0{,}86 \vee e^{2x+4} \neq 0$

$f''(-1{,}86) \approx -36 < 0 \Rightarrow$ HP $\quad f(-1{,}86) \approx 12{,}3 \quad$ HP$(-1{,}86/12{,}3)$

$f''(0{,}86) \approx 8291 > 0 \Rightarrow$ TP $\quad f(0{,}86) \approx -1311{,}7 \quad$ TP $(0{,}86/-1311{,}7)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -2{,}45 \vee x \approx 0{,}45$ (s.o.)

$f'''(-2{,}45) \approx -23{,}54 < 0 \Rightarrow$ WP (max. Steigung) $f(-2{,}45) \approx 8{,}95$

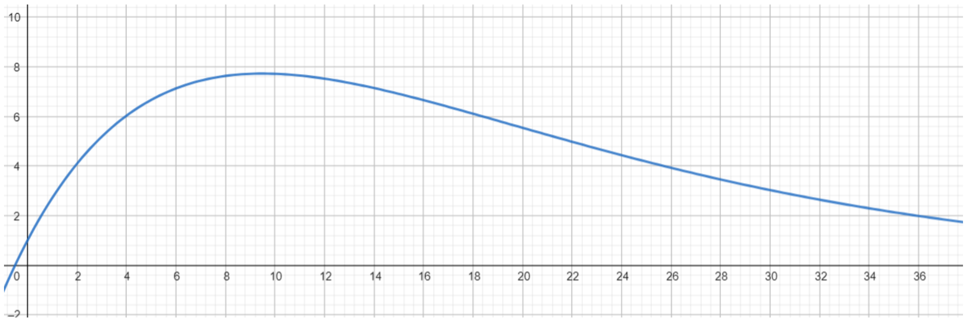
$f''(0{,}45) \approx 7802{,}24 > 0 \Rightarrow$ WP (min. Steigung) $\quad f(0{,}45) \approx -938{,}35$

WP_1 $(-2{,}45/8{,}95)$ $\quad WP_2$ $(0{,}45/-938{,}35)$

$\lim\limits_{x \to \infty} ((5x^2 - 8) \cdot e^{2x+4}) = \infty \quad (\infty \cdot \infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} ((5x^2 - 8) \cdot e^{2x+4}) = 0 \quad (\infty \cdot 0$ und die e-Funktion bestimmt das Verhalten im Unendlichen)

4. Das Wachstum eines Bakteriums kann durch die Funktion f(x) = (2x + 1) · $e^{-0,1x}$ modelliert werden, (x: Stunden, f(x): Anzahl der Bakterien in 100).



a. Wie viele Bakterien gibt es nach 20 Stunden?

f(20) ≈5,55

Nach 20 Stunden gibt es ca. 555 Bakterien.

b. Berechnen Sie, wann die meisten Bakterien vorhanden sind! Wie viele Bakterien sind dann vorhanden?

<u>Maximum</u>:

f'(x) = (−0,2x + 1,9) · $e^{-0,1x}$

f''(x) = (0,02x−0,39) · $e^{-0,1x}$

f'(x) = 0 ⇔ −0,2x + 1,9 = 0 v $e^{-0,1x}$ = 0

⇔ x ≈ 9,5 v $e^{-0,1x} \neq 0$

f''(9,5) ≈ − 0,077 < 0 => HP f(9,5) ≈ 7,73 (Rand: f(0) = 1 < 7,73)

Nach 9,5 Stunden ist mit 773 Bakterien

c. Berechnen Sie, wann die Anzahl der Bakterien am stärksten fällt.

<u>Wendepunkte</u>:

f''(x) = (0,02x−0,39) · $e^{-0,1x}$= 0 ⇔ x = 19,5

Untersuchung auf VZW bei f''(x): f''(19) ≈ −0,0015 f''(20) ≈ 0,0014

d.h. VZW von − nach +, d.h. minimale Steigung

Nach 19,5 Stunden verringert sich die Anzahl der Bakterien am stärksten.

d. Nach 26 Stunden nimmt die Anzahl der Bakterien linear ab. Berechnen Sie, wann es keine Bakterien mehr gibt!

<u>Tangente</u>:

f'(26) ≈ −0,25 f(26) ≈ 3,94

t(x) = −0,25x + b

3,94 = −0,25 · 26 + b ⇔ 3,94 = −6,5 + b ⇔ b = 10,44

t(x) = −0,25x + 10,44

t(x) = 0 ⇔ x = $\frac{10,44}{0,25}$ = 41,76

Nach 41,76 Stunden sind die Bakterien verschwunden.