Lösungen zu den Übungen für den 1. Teil des Abiturs ohne Taschenrechner: Analysis

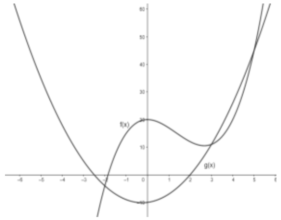
Teil I: ganzrationale Funktionen

Aufgabe	Lösung
1. Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung f(x) = $x^2 - 6x$! a. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f! b. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im Intervall [1; 4] zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse liegt. c. Der Graph der Funktion g geht durch die Verschiebung aus dem Graphen f um 4 nach rechts hervor. Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm der Funktion g an. Vereinfachen Sie diesen Term anschließend. d. Berechnen Sie das Intervall, in dem f(x) $\leq$ 40 ist!	a. $x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$ b. A = $\left\lvert\int_1^4 (x^2 - 6x)dx\right\rvert = \left\lvert\left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_1^4\right\rvert$ $= \left\lvert\frac{1}{3}\cdot 4^3 - 3\cdot 4^2 - (\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2)\right\rvert$ $= \left\lvert\frac{64}{3} - 48 - \frac{1}{3} + 3\right\rvert = \left\lvert\frac{63}{3} - 45\right\rvert = \lvert 21 - 45\rvert = \lvert -24\rvert = 24$ c. $g(x) = (x-4)^2 - 6\cdot(x-4) = x^2 - 8x + 16 - 6x + 24 = x^2 - 14x + 40$ d. $f(x) = 40 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 40 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 40 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-40)} = 3 \pm \sqrt{49} = 3 \pm 7$ $\Leftrightarrow x_1 = -4 \vee x_2 = 10$ (und f(0) = 0 $\leq$ 40) Das gesuchte Intervall ist $[-4; 10]$.
2. Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung f(x) = $2x^2 + 4x - 48$! a. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f! (Zur Kontrolle: x = −6 und x = 4) b. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im Intervall [-2; 0] zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse liegt. c. Begründen Sie, welcher der folgenden Terme die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse im Intervall [3;5] beschreibt. i. A = $\int_3^5 f(x)dx$ ii. A = $\left\lvert\int_3^5 f(x)dx\right\rvert$ iii. A = $\int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx$ iv. A = $\left\lvert\int_3^4 f(x)dx\right\rvert + \left\lvert\int_4^5 f(x)dx\right\rvert$ v. A = $\left\lvert\int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx\right\rvert$	a. $2x^2 + 4x - 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-24)} = -1 \pm \sqrt{25} = -1 \pm 5$ $\Leftrightarrow x_1 = -6 \vee x_2 = 4$ b. A = $\left\lvert\int_{-2}^0 (2x^2 + 4x - 48)dx\right\rvert = \left\lvert\left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 48x\right]_{-2}^0\right\rvert$ $= \left\lvert 0 - (\frac{2}{3}\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - 48\cdot(-2))\right\rvert$ $= \left\lvert 0 - (-\frac{16}{3} + 8 + 96)\right\rvert = \left\lvert\frac{16}{3} - 104\right\rvert = \left\lvert\frac{16}{3} - \frac{312}{3}\right\rvert = \left\lvert -\frac{296}{3}\right\rvert = \frac{296}{3}$ c. iv. ist richtig, weil es innerhalb des Integrals eine Nullstelle gibt und die Integrale daher einzeln berechnet werden müssen, da eines der beiden Integrale negativ wäre.

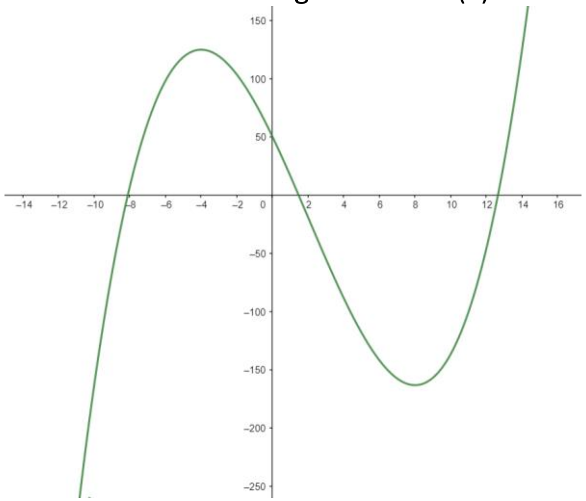
3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 4x$! a. Zeigen Sie, dass $f'(-2) = -36$. b. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen f an der Stelle $x = -2$! c. Prüfen Sie, ob eine Tangente an f existiert, die parallel zur Geraden g mit $g(x) = 104x + 6$ verläuft und berechnen Sie gegebenenfalls den x-Wert! d. Zeigen Sie, dass f(x) in P(1/−3) einen Tiefpunkt hat. Begründen Sie, dass es sich um einen absoluten Tiefpunkt handelt.	a. $f'(x) = 4x^3 - 4$ $\quad f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 4 = -32 - 4 = -36$ b. $f(-2) = (-2)^4 - 4 \cdot (-2) = 16 + 8 = 24$ $m = -36$ $\quad t(x) = -36x + b$ P(−2/24) einsetzen: $24 = -36 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow 24 = 72 + b \Leftrightarrow b = -48$ $t(x) = -36x - 48$ c. $f'(x) = 104 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 104 \Leftrightarrow 4x^3 = 108 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$ Für x = 3 existiert eine Tangente an f, die parallel zu g verläuft. d. $f'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ $f''(x) = 12x^2$ $\quad f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow$ TP $f(1) = 1 - 4 = -3$ Da die Zahl vor x^4 positiv ist (nämlich 1), gilt: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. Daher gibt es keinen tiefergelegenen Punkt als der gesuchte.
4. Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Gleichungen $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6$ und $h(x) = x^3 - 5x^2 - 6$. a. Zeigen Sie, dass sich die Graphen g und h nur für $x = -1$ und $x = 0$ schneiden. b. Berechnen Sie die Fläche, die die Graphen g und h einschließen!	a. $g(x) = f(x) \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 - 6 = x^3 - 5x^2 - 6 \;/ -x^3 \;/ +5x^2 \;/ +6$ $\Leftrightarrow x^3 + x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$ b. $\left\lvert \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\,dx \right\rvert = \left\lvert \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} \right\rvert = \left\lvert 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \right\rvert = \left\lvert -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right\rvert$ $= \left\lvert -\frac{3}{12} + \frac{4}{12} \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{12} \right\rvert = \frac{1}{12}$
5. Gegeben sind ganzrationale Funktionen dritten Grades. a. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades verläuft durch die Punkte P(−1/4) und Q(3/−16) und hat im Punkt R (2/−23) einen Extrempunkt. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem die Gleichung der Funktion bestimmt werden kann.	a. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ P(−1/4): $-a + b - c + d = 4$ Q(3/−16): $27a + 9b + 3c + d = -16$ R (2/−23): $8a + 4b + 2c + d = -23$ $f'(2) = 0$: $12a + 4b + c = 0$

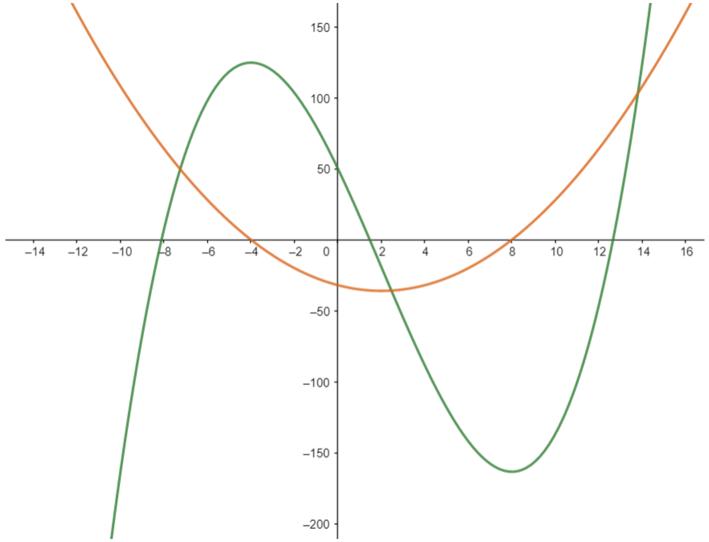
b. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 1$ und $x = 4$. Bestimmen Sie eine entsprechende Funktionsgleichung und begründen Sie, warum es mehrere passende Funktionsgleichungen gibt!	b. $f(x) = (x + 2) \cdot (x-1) \cdot (x-4)$ Jede Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x-1) \cdot (x-4)$, $a \in \mathbb{R}$, würde die Voraussetzung erfüllen.
6. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$. a. Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie den Bereich an, in denen der Graph von f im Intervall $[-4; 2]$ oberhalb der x-Achse verläuft. (Zur Kontrolle: $x = -4$, $x = 0$ und $x = 2$) b. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-1; 1]$ zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse liegt.	a. $x^3 + 2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 2x - 8 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4 \vee x = 2$ $x \in [-4; 0]$: $f(-1) = 9$ also $f(x) > 0$ in $[-4; 0]$ $x \in [0; 2]$: $f(1) = -5$ also $f(x) > 0$ in$[0; 2]$: Der Graph liegt für $-4 < x < 0$ oberhalb der x-Achse. b. $\int_{-1}^{0}(x^3 + 2x^2 - 8x)dx + \left\lvert\int_{0}^{1}(x^3 + 2x^2 - 8x)dx\right\rvert$ $= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 4x^2\right]_{-1}^{0} + \left\lvert\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 4x^2\right]_{0}^{1}\right\rvert$ $= 0 - (\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - 4) + \left\lvert\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 4 - 0\right\rvert$ $= -\frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{48}{12} + \left\lvert\frac{3}{12} + \frac{8}{12} - \frac{48}{12}\right\rvert = \frac{53}{12} + \left\lvert-\frac{37}{12}\right\rvert = \frac{53}{12} + \frac{37}{12} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2} = 7{,}5$
7. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 20$ und $g(x) = 2x^2 + x - 10$. a. Zeigen Sie, dass sich die Funktionen in $x = -2$, $x = 3$ und $x = 5$ schneiden. b. Stellen Sie den Term auf, der den Flächeninhalt der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche beschreibt. Bilden Sie anschließend die entsprechende Stammfunktion. (Hinweis: Sie müssen den Term <u>nicht</u> weiter berechnen!)	a. $f(-2) = -8 - 16 + 20 = -4$ $g(-2) = 8 - 2 - 10 = -4$ $f(3) = 27 - 36 + 20 = 11$ $g(3) = 18 + 3 - 10 = 11$ $f(5) = 125 - 100 + 20 = 45$ $g(5) = 50 + 5 - 10 = 45$ b. $A = \int_{-2}^{3}(f(x) - g(x))dx + \int_{3}^{5}(g(x) - f(x))dx$ [oder: $A = \left\lvert\int_{-2}^{3}(f(x) - g(x))dx\right\rvert + \left\lvert\int_{3}^{5}(f(x) - g(x))dx\right\rvert$ oder: $A = \int_{-2}^{3}(f(x) - g(x))dx + \left\lvert\int_{3}^{5}(f(x) - g(x))dx\right\rvert$] $= \int_{-2}^{3}(x^3 - 6x^2 - x + 30)dx + \int_{3}^{5}(-x^3 + 6x^2 + x - 30)dx$ $= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x\right]_{-2}^{3} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 30x\right]_{3}^{5}$

<table>
<tr>
<td>
c. Berechnen Sie den Wert x, in dem der Graph von f(x) die geringste Steigung hat.

d. Berechnen Sie die lokale Extremstelle von g(x).


</td>
<td>
c. $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $f''(x) = 6x - 8$ $f'''(x) = 6$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$f'''(\frac{4}{3}) = 6 > 0$ => minimale Steigung
f hat in $x = \frac{4}{3}$ die geringste Steigung.

d. $g'(x) = 4x + 1$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$
$g''(x) = 4$ $g''(-\frac{1}{4}) = 4 > 0$ => TP
g hat in $x = -\frac{1}{4}$ einen Tiefpunkt.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
8. Gegeben ist die Funktion f(x).
Skizzieren Sie die Ableitungsfunktion f'(x).


</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>