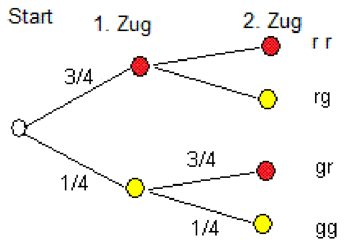
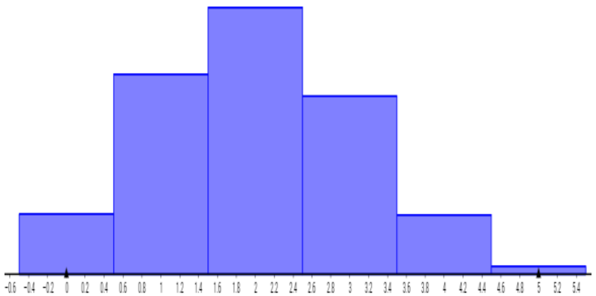
Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für das Abitur

<table>
<tr><th>Begriff</th><th>Definition</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td>Ergebnis</td><td>Ausgang eines Zufallsexperimentes</td><td>bei einem Würfel: {6}</td></tr>
<tr><td>Ereignis</td><td>Menge/Zusammenfassung von Ergebnissen</td><td>bei einem Würfel: {2,4,6}</td></tr>
<tr><td>Ergebnismenge</td><td>Menge aller möglichen Ergebnisse</td><td>bei einem Würfel: {1,2,3,4,5,6}</td></tr>
<tr><td>mehrstufige Zufallsexperimente</td><td>Mehrstufige Zufallsexperimente können durch ein Baumdiagramm dargestellt werden.
Pfadregel 1: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
Pfadregel 2: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade.</td><td>Urne mit 6 roten und 2 gelben Kugeln; 2maliges Ziehen mit Zurücklegen
P(eine rote und eine gelbe Kugel) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

</td></tr>
<tr><td>bedingte Wahrscheinlichkeit/ Vierfeldtafeln</td><td>$P_B(A)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B</td><td>In einer Firma arbeiten 45 % Frauen und 55 % Männer. 60% der Frauen und 10% der Männer arbeiten halbtags. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Halbtagskraft weiblich ist?
P = $\frac{0,27}{0,325}$ = 0,8307, d.h. sie ist 83,07%.
<table>
<tr><th></th><th>Frauen</th><th>Männer</th><th></th></tr>
<tr><td>halbe Stelle</td><td>0,45 · 0,6 = 0,27</td><td>0,55 · 0,1 = 0,055</td><td>0,325</td></tr>
<tr><td>ganze Stelle</td><td>0,45 · 0,4 = 0,18</td><td>0,55 · 0,9 = 0,495</td><td>0,675</td></tr>
<tr><td></td><td>0,45</td><td>0,55</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Zufallsgröße X X = a	X ist eine Größe, die jedem Ereignis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zuordnet. beschreibt das Ereignis a, dessen Ergebnisse alle dazu führen, dass die Zufallsgröße X den Wert a annimmt	X = Augensumme bei 2maligem Würfeln X = 6 bedeutet die Augensumme 6, d.h. die Würfe (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1); es gehören also 5 Ergebnisse dazu
P(X = a)	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses a (das die Zufallsgröße X annimmt)	X = Augensumme bei 2maligem Würfeln P(X = 6) = $\frac{5}{36}$
μ = E(X) Erwartungswert einer Zufallsgröße	E(X) = $x_1 \cdot P(X= x_1) + x_2 \cdot P(X= x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X= x_n)$ E gibt an, mit welchem Wert man langfristig rechnen kann.	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen; Ergebnisse: 0,1,2 rote Kugeln E(X) = $0 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + 1 \cdot [\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}] + 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10}$ = 0,8
$\sigma(X)$ Standardabweichung einer Zufallsgröße	$\sigma(X) = \sqrt{(x_1-\mu)^2 \cdot P(X=x_1) + \cdots + (x_n-\mu)^2 \cdot P(X=x_n)}$ σ gibt an, die verstreut die Werte liegen.	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen $\sigma(X) = \sqrt{(0-0{,}8)^2 \cdot \frac{36}{100} + (1-0{,}8)^2 \cdot \frac{48}{100} + (2-0{,}8)^2 \cdot \frac{16}{100}} \approx 0{,}693$
μ = E(X) Erwartungswert einer Versuchsreihe	E(X) = $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ μ ist der normale Mittelwert.	
$\sigma(X)$ Standardabweichung einer Versuchsreihe	$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot [(x_1-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2]}$	

<table>
<tr><td>Bernoulli-Versuch

Bernoulli-Kette</td><td>Bei einem Bernoulli-Versuch gibt es nur zwei Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse sind bei beliebiger Wiederholung immer gleich.
Eine Bernoulli-Kette ist ein n-mal durchgeführter Bernoulli-Versuch.</td><td>Urnenversuche mit 2 verschiedenen Kugeln und mit Zurücklegen</td></tr>
<tr><td>Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilungen</td><td>Verteilung der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p und genau k Treffern: P(X = k)
$B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$</td><td>Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln
X = Anzahl der roten Kugeln bei 5maligem Ziehen mit Zurücklegen
Die Wahrscheinlichkeit von genau 2 roten Kugeln ist:
$B_{5;0,4}(2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}3456$
Taschenrechner: BinomPdf (Menü 5,5,D) und nCr (Menü 5,1)</td></tr>
<tr><td>kumulierte Binomialverteilung</td><td>Verteilung der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p und 0 bis k Treffern: $P(X \leq k)$
$F_{n;p}(k) = \binom{n}{0} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + \cdots + \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$</td><td>Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln
X = Anzahl der roten Kugeln bei 5maligem Ziehen mit Zurücklegen
Die Wahrscheinlichkeit von höchstens 2 roten Kugeln ist:
$F_{5;0,4}(2) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}683$
Taschenrechner: BinomCdf (Menü 5,5,E)</td></tr>
<tr><td>Binomialverteilung</td><td>Gegeben ist eine n-stufige Bernoulli-Kette mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge heißt Binomialverteilung.
Sie wird durch ein Histogramm dargestellt.
</td><td>Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln
X = Anzahl der roten Kugeln bei 5maligem Ziehen mit Zurücklegen
<table><tr><td>Treffer k</td><td>$B_{5;0,4}(k)$</td></tr><tr><td>0</td><td>0,0776</td></tr><tr><td>1</td><td>0,2592</td></tr><tr><td>2</td><td>0,3456</td></tr><tr><td>3</td><td>0,2304</td></tr><tr><td>4</td><td>0,0768</td></tr><tr><td>5</td><td>0,01024</td></tr></table></td></tr>
</table>

Erwartungswert von Bernoulli-Ketten	Erwartungswert der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p: μ = E(X) = n $\cdot\, p$	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen E(X) = $2 \cdot \frac{4}{10}$ = 0,8
Standardabweichung von Bernoulli-Ketten	Standardabweichung der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen $\sigma(X) = \sqrt{2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 0{,}693$
Sigmaregeln für binomialverteilte Zufallsgrößen	P($\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma$) ≈68,3% P($\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma$) ≈90% P($\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma$) ≈95% P($\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$) ≈95,4% P($\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma$) ≈99% P($\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$) ≈99,7% Die Regeln gelten für $\sigma > 3$.	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 100maligem Ziehen mit Zurücklegen In welchem Intervall liegen 99% aller Werte von X? $\mu = 100 \cdot 0{,}4 = 40$ $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 4{,}899$ $[\mu - 2{,}58\sigma;\ \mu + 2{,}58\sigma] = [40 - 2{,}58 \cdot 4{,}899;\ 40 + 2{,}58 \cdot 4{,}899]$ $= [27{,}36;\ 52{,}64]$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% liegt die Anzahl X der roten Kugeln bei 100maligem Ziehen zwischen 28 und 52 Kugeln.
Konfidenzintervall	gegeben: 1. eine Stichprobe einer Bernoulli-Kette mit der Länge n und der Trefferzahl k; 2. Sicherheitswahrscheinlichkeit (σ-Regel) gesucht: verträgliche Wahrscheinlichkeit p (Intervall)	Bei einem Würfelspiel werden 30 Sechsen bei 100 Versuchen erzielt. Welche Erfolgswahrscheinlichkeiten sind mit einer Sicherheits-wahrscheinlichkeit von 95,4% mit dem Stichprobenergebnis vereinbar? $\mu - 2\sigma \leq 30 \leq \mu + 2\sigma$ $30 = \mu \pm 2\sigma$ $30 = 100 \cdot p \pm 2 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$ $\Leftrightarrow 100 \cdot p - 30 = \pm 2 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$ /:100 $\Leftrightarrow p - 0{,}3 = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$ /()² $\Leftrightarrow (p - 0{,}3)^2 = 4 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{100}$ $\Leftrightarrow p^2 - 0{,}6p + 0{,}09 = 0{,}04p - 0{,}04p^2$ $\Leftrightarrow 1{,}04p^2 - 0{,}64p + 0{,}09 = 0$ $\Leftrightarrow p_1 \approx 0{,}2175 \vee p_2 \approx 0{,}3978$ I = [0,2175; 0,3978]