Lösung zu den Übungen für den 1. Teil des Abiturs ohne Taschenrechner: Stochastik

1. In einer Urne befinden sich 4 blaue und 8 gelbe Kugeln.

a. Es werden 2mal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der entnommenen Kugeln blau ist.

b. Es wird 12mal hintereinander eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entnommenen blauen Kugeln. Begründen Sie ohne Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, dass eine der folgenden Abbildungen diese Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.

c. Beschreiben Sie in diesem Zusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\binom{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{7}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\binom{8}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

d. Es werden 2mal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und nicht wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der entnommenen Kugeln blau ist.

---

a. $p(\text{blau}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $p(\text{gelb}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$1 - p(\text{gelb,gelb}) = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

b.

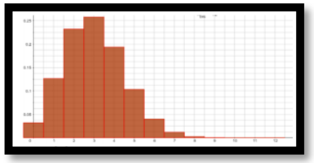


Abb. 1 passt nicht, weil $\mu = 12\cdot\frac{1}{3} = 4$

Abb.2 passt, da n = 12 und das Maximum bei 4 ist.

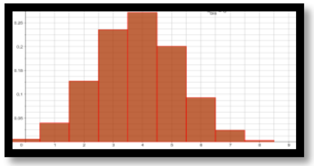
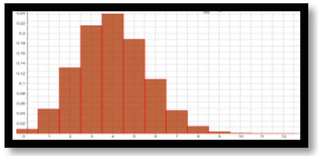
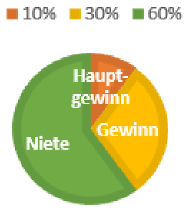


Abb. 3 passt nicht, weil n $\neq$12 ist.



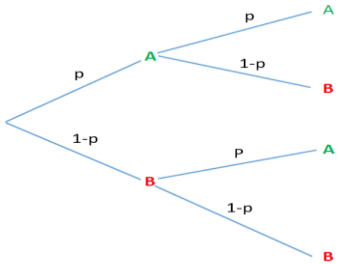
c. Bei 8maligem Ziehen werden mindestens 7 blaue Kugeln (bzw. höchstens eine gelbe Kugel) gezogen.

d. $p(\text{blau,gelb}) + p(\text{gelb,blau}) = \frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{8}{33}+\frac{8}{33} = \frac{16}{33}$

2. Ein Glücksrad besteht aus 3 Sektoren, die mit Hauptgewinn, Gewinn und Niete beschriftet werden. Für ein Spiel gelten folgende Regeln: Man setzt einen Betrag von 5 € ein. Wird beim Drehen der Hauptgewinn erzielt, werden 25 € ausgezahlt, bei Gewinn werden 8 € ausgezahlt. a. Zeigen Sie, dass das Spiel nicht fair ist. b. Die Auszahlung für den Hauptgewinn soll so geändert werden, dass das Spiel für alle Seiten fair ist. Berechnen Sie den neuen Auszahlungsbetrag. c. Es sei E_1 das Ereignis „Das Glücksrad bleibt genau 10mal bei Niete stehen." Es wird 25mal gedreht. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ansätze zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E_1 genutzt werden kann und begründen Sie Ihre Meinung. i. $P(E_1) = 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^{15}$ ii. $P(E_1) = \binom{25}{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^{15}$ iii. $P(E_1) = 15 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^{15}$ iv. $P(E_1) = \binom{25}{10} \cdot 0{,}4^{10} \cdot 0{,}6^{15}$ v. $P(E_1) = 10 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot 0{,}4$ vi. $P(E_1) = 10 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^{15}$ d. Entscheiden Sie, welche der obigen Ansätze zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E_2 genutzt werden kann, wenn genau die ersten 10 Drehungen bei Niete stehen bleiben.	 a. $\mu = 0{,}1 \cdot 20 + 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot (-5) = 2 + 0{,}9 - 3 = -0{,}1$ Im Schnitt verliert man 10 Cent. b. $\mu = 0{,}1 \cdot (x-5) + 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot (-5) = 0$ $\Leftrightarrow 0{,}1x - 0{,}5 + 0{,}9 - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 0{,}1x - 2{,}6 = 0$ $\Leftrightarrow 0{,}1x = 2{,}6$ $\Leftrightarrow x = 26$ Der Hauptgewinn sollte 26 € sein. c. ii. ist richtig, da es sich um eine Binomialverteilung mit n = 25, k = 10 und p = 0,6 handelt. d. i. ist richtig, da es in diesem Fall nur einen möglichen Pfad gibt.
3. In chinesischen Glückkeksen werden kleine Zettel mit Botschaften eingebacken. Es werden 5 verschiedene Botschaften A, B, C, D und E mit gleicher Wahrscheinlichkeit eingefügt. a. Stellen Sie den Term auf, der die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass in 3 zufällig ausgewählten Glückkeksen die Botschaft C nicht enthalten ist. b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 5 zufällig ausgewählten Glückskeksen alle 5 Botschaften enthalten sind.	a. $p(C) = 0{,}2$ Der gesuchte Term ist $0{,}8^3$. b. $\frac{5}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{24}{525}$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{24}{525}$.

<table>
<tr>
<td>

4. Bei einem 2stufigen binomialverteilten Zufallsexperiment gibt es die möglichen Ergebnisse A und B mit P(A)=p.
   a. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie P(AA), P(AB), P(BA) und P(BB)!
   b. Bestimmen Sie p so, dass $P(AB) = \frac{3}{16}$ ist.



</td>
<td>

a. $P(AA) = p^2$ $\quad$ $P(AB) = p\cdot(1-p)$
   $P(BA) = (1-p)\cdot p$ $\quad$ $P(BB) = (1-p)^2$

b. $P(AB) = p\cdot(1-p) = \frac{3}{16} \Leftrightarrow p - p^2 = \frac{3}{16} \Leftrightarrow -p^2 + p - \frac{3}{16} = 0$

$\Leftrightarrow p^2 - p + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{16} - \frac{3}{16}}$

$\Leftrightarrow p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \vee p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

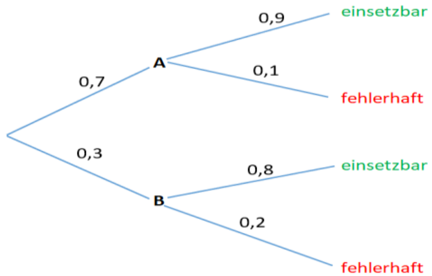
P ist entweder 75% oder 25%.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

5. In einer Fabrik werden 2 verschiedene Impfstoffe A und B hergestellt. 70% der hergestellten Impfstoffe sind von der Sorte A. Aus Erfahrung muss man 10% der Produktion des Impfstoffes A entsorgen, da dort Unreinheiten auftreten. 30% der hergestellten Impfstoffe sind von der Sorte B. Aus Erfahrung muss man 20% der Produktion des Impfstoffes B entsorgen, da dort Unreinheiten auftreten.
   a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Impfstoff ein verunreinigter Impfstoff der Sorte A ist.
   b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Impfstoff ein einsetzbarer Impfstoff der Sorte B ist.
   c. Stellen Sie Terme auf, die die folgenden Wahrscheinlichkeiten darstellen:
      (Sie brauchen die Terme nicht zu berechnen!)
      i. Aus der Charge der verunreinigten Impfstoffe zieht man den Impfstoff A.
      ii. Aus der Charge der einsatzfähigen Impfstoffe zieht man den Impfstoff B.

</td>
<td>

a.



$0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 7 %.

b. $0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 24 %.

c. $\frac{0{,}7\cdot 0{,}1}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2} = \frac{0{,}07}{0{,}07+0{,}06} = \frac{0{,}07}{0{,}13}$

$\frac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8} = \frac{0{,}24}{0{,}63+0{,}24} = \frac{0{,}24}{0{,}87}$

</td>
</tr>
</table>