Lösung zur Lagebeziehung zweier Geraden

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h! Geben Sie wenn möglich die Koordinaten des Schnittpunktes an!

a. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind kollinear, d.h. die Geraden sind parallel oder identisch.

Punktprobe: Liegt $P(2/3/1)$ auf h?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 0 \\ s = 0{,}25 \\ s = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

d.h. P liegt nicht auf h

Die Geraden sind parallel.

b. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3 + r = -3s \\ -2 + 1{,}5r = -4s \\ 9 + 2r = -5s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \cdot (-2) \\ II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} -6 - 2r = 6s \\ -2 + 1{,}5r = -4s \\ 9 + 2r = -5s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3 = s \\ -2 + 1{,}5r = -4 \cdot 3 \\ 9 + 2r = -5s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I + III \\ II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3 = s \\ r = -\frac{20}{3} \\ 9 + 2r = -5s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I + III \\ II \\ III \end{matrix}$$

Überprüfen in III: $9 + 2 \cdot \left(-\frac{20}{3}\right) = -5 \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{-13}{3} = -15$ ist offensichtlich falsch

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

Die Geraden sind windschief.

c. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 8 + 2r = 3s \\ -7 + r = -4s \\ 1 - r = s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 8 + 2r = 3s \\ -7 + r = -4s \\ -6 = -3s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III + II \end{matrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 8 + 2r = 3s \\ -7 + r = -4 \cdot 2 \\ 2 = s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 8 + 2r = 3s \\ r = -1 \\ 2 = s \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

Überprüfen in I: $8 + 2 \cdot (-1) = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 6 = 6$

Berechnung des Schnittpunktes: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich in S(5/-6/7).

d. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\10\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind kollinear, d.h. die Geraden sind parallel oder identisch.

Punktprobe: Liegt $P(1/2/3)$ auf h?

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\10\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix} / - \begin{pmatrix}-5\\-1\\10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6\\3\\-9\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}s=0{,}75\\s=0{,}75\\s=0{,}75\end{matrix}$$ d.h. P liegt auf h

Die Geraden sind identisch.

2. Gegeben sind die Punkte eines regelmäßigen Pyramidenstumpfs: A(0/0/-2), B(5/0/-2), C(5/6/-2) und E(1/1/3), G(4/5/3), H(1/5/3). Die Gerade f geht durch die Punkte B und H, die Gerade g durch die Punkte C und E und die Gerade h durch die Punkte $M_{\overline{BC}}$ und $M_{\overline{EH}}$! Untersuchen Sie, ob sich die Geraden f, g und h jeweils schneiden und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt!

$f: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-5\end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}$

$M_{\overline{BC}}$: $0{,}5\,(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$ also $M_{\overline{BC}} = (5/3/-2)$

$M_{\overline{EH}}$: $0{,}5\,(\vec{e}+\vec{h}) = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$, *also ist* $M_{\overline{EH}} = (1/3/3)$ d.h. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}$

f und g:

$$\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix} / - \begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-5\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix}4r=4s\\-6-5r=5s\\-5r=-5s\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}r=s\\-6-5s=5s\\r=s\end{matrix}\right|\begin{matrix}I:4\\I\text{ in }II\\III\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}r=s\\s=-0{,}6\\r=-0{,}6\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix}$$

Einsetzen in f: $\boldsymbol{\vec{x}} = \begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix} - 0{,}6\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{-5}\\\mathbf{-5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{2{,}6}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ f schneidet g in S(2,6/3/1)

f und h:

$$\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix} / - \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-5\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix}4r=4t\\-3-5r=0\\-5r=-5t\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}r=t\\r=-\frac{3}{5}\\r=t\end{matrix}\right|\begin{matrix}I:4\\II\\III:(-5)\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}r=t\\r=-\frac{3}{5}\\t=-\frac{3}{5}\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\II\text{ in }III\end{matrix}$$

Schnittpunkt: $\vec{s} = \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix} + (-\frac{3}{5})\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{5}\\3\\1\end{pmatrix}$ f und h schneiden sich in $S(\frac{13}{5}/3/1)$

g und h:

$$\begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}/-\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix}4s=4t\\3+5s=0\\-5s=-5t\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}s=t\\r=-\frac{3}{5}\\-s=-t\end{matrix}\right|\begin{matrix}I:4\\II\\III\end{matrix}$$

Einsetzen in III: $-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\left(-\frac{3}{5}\right)$, das ist richtig.

$$\begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix}-\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{5}\\3\\1\end{pmatrix}$$

g und h schneiden sich in S($\frac{13}{5}$/3/1)

3. Gegeben sind die Punkte eines Polyeders: A(0/0/4), B(5/0/4), C(5/3/4), D(0/3/4), E(2,5/1,5/0) und F(2,5/1,5/8). Die Gerade f geht durch die Punkte B und $M_{\overrightarrow{DF}}$, die Gerade g durch die Punkte C und $M_{\overrightarrow{BE}}$ und die Gerade h durch die Punkte E und F!
Untersuchen Sie, ob sich die Geraden f, g und h jeweils schneiden und berechnen Sie den Schnittpunkt!

$M_{\overrightarrow{DF}}$ = (1,25/2,25/6) und $M_{\overrightarrow{BE}}$ = (3,75/0,75/2)

f: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3{,}75\\-2{,}25\\-2\end{pmatrix}$ und g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1{,}25\\2{,}25\\2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix}$

f und g:

$$\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3{,}75\\-2{,}25\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1{,}25\\2{,}25\\2\end{pmatrix}/-\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3{,}75\\-2{,}25\\-2\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}1{,}25\\2{,}25\\2\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix}3{,}75r=1{,}25s\\-3-2{,}25r=2{,}25s\\-2r=2s\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}3r=s\\-3-2{,}25r=2{,}25s\\-r=s\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\\II:2\end{matrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}3r=s\\-3-2{,}25r=2{,}25\cdot(-r)\\-r=s\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\III\ in\ II\\II\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}3r=s\\-3=0\\-r=s\end{matrix}\right|\begin{matrix}I\\II\text{ falsch}\\II\end{matrix}$$

Ihre Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

f und g sind windschief

f und h:

$$\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3{,}75\\-2{,}25\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}/-\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2{,}5\\-1{,}5\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3{,}75\\-2{,}25\\-2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{r} 2{,}5+3{,}75r=0 \\ -1{,}5-2{,}25r=0 \\ 4-2r=8s \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} r=-\frac{2}{3} \\ -1{,}5-2{,}25r=0 \\ 4-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=8t \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ I\ in\ II \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} r=-\frac{2}{3} \\ -1{,}5-2{,}25r=0 \\ \frac{2}{3}=t \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ I\ in\ II \end{array}$$

Überprüfen in II: $-1{,}5-2{,}25\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 0=0$

$$\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\\frac{16}{3}\end{pmatrix}$$

f und h schneiden sich in $S(2{,}5/1{,}5/\frac{16}{3})$

g und h:

$$\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1{,}25\\2{,}25\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} \Big/ -\begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1{,}25\\2{,}25\\2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{r} 2{,}5+1{,}25r=0 \\ 1{,}5-2{,}25r=0 \\ 4-2r=8t \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} r=-1{,}5 \\ -1{,}5-2{,}25r=0 \\ 4-2\cdot(-1{,}5)=8t \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ I\ in\ II \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} r=-1{,}5 \\ r=-\frac{2}{3} \\ \frac{7}{8}=s \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array}$$ -> das ist ein Widerspruch

Ihre Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

f und h sind windschief

4. Prüfen Sie, ob die Geraden g und h sich im rechten Winkel schneiden!

a. g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\\17\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\-10\end{pmatrix}$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3+2\cdot r=4-5\cdot s\\-1+r=-3\\5-r=17-10\cdot s\end{cases},\{r,s\}\right) \quad r=-2 \text{ and } s=1$$

Die Richtungsvektoren müssen orthogonal sein, d.h. das Skalarprodukt dieser Vektoren ist 0!

Überprüfung: $2\cdot(-5)+1\cdot 0+(-1)\cdot(-10)=0\ \surd$

Die Geraden sind orthogonal.

b. g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}16\\25\\36\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\-33\\-12\end{pmatrix}$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}-5+3\cdot r=16-6\cdot s\\2-2\cdot r=25-33\cdot s\\4+4\cdot r=36-12\cdot s\end{cases},\{r,s\}\right) \quad r=5 \text{ and } s=1$$

Überprüfung: $3\cdot(-6)+(-2)\cdot(-33)+4\cdot(-12)=0\ \surd$

Die Geraden sind orthogonal.

c. g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\10\\6\end{pmatrix}$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3-2\cdot r=4+2\cdot s\\-5+2\cdot r=-2+10\cdot s\\2+6\cdot r=3+6\cdot s\end{cases},\{r,s\}\right) \quad r=\frac{-1}{6} \text{ and } s=\frac{-1}{3}$$

Überprüfung: $(-2)\cdot 2+2\cdot 10+6\cdot 6=52\neq 0$

Die Geraden sind nicht orthogonal.

5. Aufgaben zu Geradenscharen:

a. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-5\\7\end{pmatrix}$ und h_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}a\\3\\-4\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $a\epsilon\mathbb{R}$ so, dass sich die Geraden schneiden!

$$\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}a\\3\\-4\end{pmatrix}\ /-\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-5\\7\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}a\\3\\-4\end{pmatrix}$$

Man muss zuerst die letzten beiden Gleichungen, die kein a enthalten, ausrechnen

$$\left|\begin{array}{c}2-3r=a\cdot s\\-4-5r=3s\\6+7r=-4s\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}2-3r=a\cdot s\\-16-20r=12s\\18+21r=-12s\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\cdot 4\\III\cdot 3\end{array}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}2-3r=a\cdot s\\2+r=0\\18+21r=-12s\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II+III\\III\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{c}2-3r=a\cdot s\\r=-2\\18+21\cdot(-2)=-12s\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\II\ in\ III\end{array}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}2-3r=a\cdot s\\r=-2\\s=2\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}$$

Einsetzen in I: $2-3\cdot(-2)=a\cdot 2$ => a = 4

Für a = 4 schneiden sich die Geraden.

b. Gegeben sind die Geraden g_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$ und h_b: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\b\\-1\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie a, $b\epsilon\mathbb{R}$ so, dass die Gerade g die Gerade h im Punkt S(3/—4/5) schneidet!

$$\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}5+r=3\\2r=-4\\3+a\cdot r=5\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}r=-2\\r=-2\\3+a\cdot(-2)=5\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\III=>a=-1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\b\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}-1+4s=3\\-2+b=-4\\6-s=5\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}s=1\\b=-2\\s=1\end{array}\right|\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}$$

Für a = —1 und b = —2 schneiden sich die Geraden.