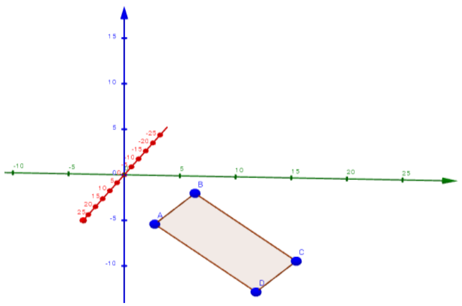
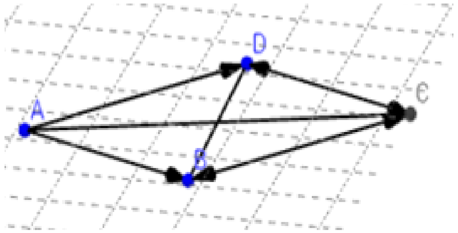
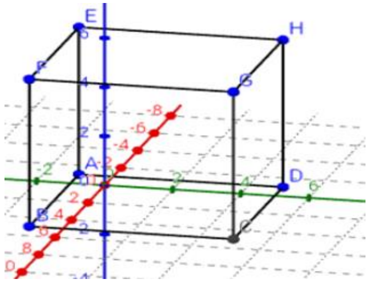
Lösungen zu den Übungen zur Orthogonalität von Vektoren

	Aufgabe	Rechnung	Lösung
1	Untersuche Sie, ob die Vektoren orthogonal zueinander sind! $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot 6 + (-1)\cdot 4 + 4\cdot(-2) = 0$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot 6 + 4\cdot 0 = 0$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = 6\cdot 3 + 4\cdot 6 + (-2)\cdot 0 = 32 \neq 0$	$\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ sind orthogonal. $\vec{a}$ *und* $\vec{c}$ sind orthogonal. $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ sind nicht orthogonal.
2	Untersuchen Sie, um welches Viereck es sich handelt! A(2/3/—5), B(5/7/—1), C(12/,17/—7), D(9/13/—11) 	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}7\\10\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}7\\10\\-6\end{pmatrix}$ Also gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *und* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$! $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\10\\-6\end{pmatrix}$ = 21 + 40 – 24 = 37, d.h. es gibt keinen rechten Winkel.	Das Viereck ist ein Parallellogramm.

3	Geben Sie einen Vektor an, der auf $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ senkrecht steht! $a. \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$	Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot 6 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$ **Alternativ**: Gesucht $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ sodass gilt: $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \; und \; \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ $a. \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 6n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0$ I. $2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 2n_1 + 4n_3$ II. $6n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0$ Einsetzen von I. in II: $6n_1 + 4 \cdot (2n_1 + 4n_3) - 2n_3 = 0$ $14n_1 + 14n_3 = 0$ $\mathbf{n_1 = -n_3}$ Einsetzen in I.: $n_2 = 2 \cdot (-n_3) + 4n_3$ $\mathbf{n_2 = 2n_3}$	$\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -n_3 \\ 2n_3 \\ n_3 \end{pmatrix}$ z.B. für $n_3 = 4$: $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
	$b. \vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$	b. Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-6) \\ (-4) \cdot 8 - 20 \cdot 1 \\ 20 \cdot (-6) - (-2) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -52 \\ -104 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Alternativ}$: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 20n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = 8n_1 - 6n_2 + n_3 = 0$ I. $20n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$ II. $8n_1 - 6n_2 + n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = -8n_1 + 6n_2$ Einsetzen von II. in I: $20n_1 - 2n_2 - 4 \cdot (-8n_1 + 6n_2) = 0$ $52n_1 - 26n_2 = 0$ $n_1 = \frac{26}{52} n_2$ $\mathbf{n_1 = 0{,}5\, n_2}$ Einsetzen in II.: $n_3 = -8 \cdot 0{,}5\, n_2 + 6n_2 = 2n_2$ $\mathbf{n_3 = 2n_2}$	$\begin{pmatrix} -26 \\ -52 \\ -104 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0{,}5n_2 \\ n_2 \\ 2n_2 \end{pmatrix}$ z.B. für $n_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4	Gegeben sind die Punkte A(2/−1/2), B(−3/−2/2) und C(1/1/3)! a. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist! b. Untersuchen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Überlegen sie dazu zuerst, wo ein rechter Winkel sein könnte!	a. Zu zeigen: $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert$ (oder $= \left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert$) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{26}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ [$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{6}$] b. Der rechte Winkel kann nur zwischen den gleichen Seiten liegen: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -23 \neq 0$	Das Dreieck ist gleichschenklig. Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

5	Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Viereck mit A(2/3/−5), B(7/9/−4), C(9/16/−1) und D(4/10/−2) um eine Raute handelt und berechnen Sie den Flächeninhalt!  	Zu zeigen: 1. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{DC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ 2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$ (Beweis, dass es kein Quadrat ist) Zu 1: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ Zu 2: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{DC}\rvert = \sqrt{5^2+6^2+1^2} = \sqrt{62}$ $\lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{2^2+7^2+3^2} = \sqrt{62}$ Zu 3: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 10+42+3 \neq 0$ Flächeninhalt: $A = 0{,}5 \cdot e \cdot f$ $= 0{,}5 \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BD}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}7\\13\\4\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{7^2+13^2+4^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+1^2+2^2} \approx$ $0{,}5 \cdot 15{,}3 \cdot 3{,}74 = 28{,}61$	Das Viereck ist eine Raute. Der Flächeninhalt der Raute beträgt 28,61 FE.
6	Gegeben ist ein Quader mit A(−1/1/0), B(5/−1/0) und G(5/5/7). Untersuchen Sie, ob die Raumdiagonalen $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{BH}$ senkrecht aufeinander stehen!  	H(−1/5/7) $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix}-6\\6\\7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = 6 \cdot (-6) + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 7 = 37 \neq 0$	Die Raumdiagonalen stehen nicht senkrecht aufeinander.