Lösungen zu Übungen für den 1. Teil des Abiturs ohne Taschenrechner

analytische Geometrie

1. Gegeben sind die Punkte A(−1/3/1), B(0/2/3), C (3/−2/8).

a. Zeigen Sie, dass die Punkte ABC nicht auf einer Geraden liegen.
b. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AB}$ an.
c. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte ABC an.
d. Berechnen Sie den Schnittpunkt S von E mit der x_3-Achse.

a. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 = -1 + r \\ -2 = 3 - r \\ 8 = 1 + 2r \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r = 4 \\ r = 5 \\ r = 3{,}5 \end{vmatrix}$$

C liegt nicht auf der Geraden.

b. $M_{\overline{AB}}(-0{,}5/2{,}5/2)$

c. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

d. x_3-Achse: h: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I+II: } \begin{vmatrix} -1 + r + 4s = 0 \\ 3 - r - 5s = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 + r + 4s = 0 \\ 2 - s = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 + r + 8 = 0 \\ s = 2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} r = -7 \\ s = 2 \end{vmatrix} \quad \text{III: } 1 - 14 + 14 = t \Leftrightarrow t = 1$$

$$\vec{x} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S(0/0/1) ist der gesuchte Schnittpunkt.

2. Gegeben sind die Punkte A(6/−3/14), B(9/−7/2) und C(13/−4/2). a. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC im Punkt B einen rechten Winkel hat. b. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks. c. Geben Sie einen Punkt D an, sodass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.	a. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -12 + 12 + 0 = 0$ b. $\lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$ $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 = \frac{65}{2} = 32{,}5$ c. z.B.: $\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$ D(10/0/14)
3. Gegeben sind die Punkte A(4/2/1), B(3/6/0) und $C_u(2/2/u)$, $u \in \mathbb{R}$. a. Bestimmen Sie u so, dass das Dreieck ABC_u im Punkt B rechtwinklig ist. b. Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die durch alle Punkte C_u mit $u \in \mathbb{R}$ verläuft. c. Geben einen Wert von u an, sodass die Länge der Seite $\overline{BC}$ neun ist.	a. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ u \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 + 16 + u = 0 \Leftrightarrow u = -15$ b. $C_1(2/2/1)$ und $C_2(2/2/2)$ d.h. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ u \end{pmatrix} = \sqrt{1+16+u^2} = \sqrt{81} \Leftrightarrow 17 + u^2 = 81$ $\Leftrightarrow u^2 = 64 \Leftrightarrow u = \pm 8 \Leftrightarrow u = 8$ $(-8 \notin D(f))$
4. Die Punkte A(−2/1/−1), B(−2/4/−1), C(−6/4/−1), D, E, F(−2/4/5), G und H bilden einen Quader. a. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte D, E, G und H! b. Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Grundfläche ein Rechteck ist. c. Ermitteln Sie das Volumen des Quaders.	a. D(−6/1/−1), E(−2/1/5), G(−6/4/5), H(−6/1/5) b. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{9} = 3$ $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{16} = 4$ $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{9} = 3$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ⇨ Es handelt sich um ein Rechteck. c. V = 3 · 4 · 6 = 72 FE

5. Die Punkte A(2/4/−2), B(2/10/−2), C(6/10/−2), (6/4/−2), Eu, Fu(2/10/u), Gu und Hu bilden einen Quader, u ∈ ℝ, alle Einheiten in m. D

a. Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ senkrecht aufeinander stehen.
b. Bestimmen Sie das Volumen des Quaders so, dass der Rauminhalt 120 m³ beträgt.
c. Bestimmen Sie den Wert von u so, dass die Raumdiagonale die Länge 14 m hat.

a. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b. V = 6 · 4 · (u+2) = 120 ⇔ 24u + 48 = 120
⇔ 24 u =72 ⇔ u = 3

c. $|\overrightarrow{AGu}| = 14$ ⇔ $|\overrightarrow{AGu}| = \sqrt{196}$

$$\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (u+2)^2} = \sqrt{52 + (u+2)^2}$$

$\sqrt{52 + (u+2)^2} = \sqrt{196}$ ⇔ 52 + (u+2)² = 196
⇔ (u+2)² = 144
⇔ u + 2 = $\pm$ 12
⇔ u = 10 v u = −14 ($\notin D(f)$)
Für u = 10 hat die Raumdiagonale die Länge 14m.

6. Gegeben sind die Geraden g und h. Bestimmen Sie die Lage der beiden Geraden zueinander und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt!

a. $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ kollinear

Punktprobe:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{matrix} s = 1 \\ s = 1 \\ s = 1 \end{matrix}$

⇨ Die Geraden sind identisch.

[oder: $\left|\begin{matrix} 2 + 2r = 6 - 4s \\ -4 + 6r = 8 - 12s \\ 3 - 2r = -1 + 4s \end{matrix}\right|$ ⇔ $\left|\begin{matrix} 2r = 4 - 4s \\ 6r = 12 - 12s \\ -2r = -4 + 4s \end{matrix}\right|$ ⇔ $\left|\begin{matrix} 6r = 12 - 12s \\ 6r = 12 - 12s \\ -6r = -12 + 12s \end{matrix}\right|$]

	b. $\begin{pmatrix}2\\2\\-7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\left\vert\begin{matrix}2-4r=-12+6s\\2=4-2s\\-7+6r=2+3s\end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix}14-4r=6s\\-2=-2s\\-9+6r=3s\end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix}14-4r=6\cdot 1\\1=s\\-9+6r=3s\end{matrix}\right\vert$ $\Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix}-4r=-8\\1=s\\-9+6\cdot 2=2+3\cdot 1\end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix}r=2\\1=s\\5=5\end{matrix}\right\vert$ 🙂 $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-7\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\5\end{pmatrix}$ Die Geraden schneiden sich in S(−6/2/5).
7. Gegeben sind die Punkte A(6/2/3), B(7/2/2p) und C(6,5/p/q) mit p, q ∈ ℝ. a. Bestimmen Sie p so, dass die Gerade, die durch A und B verläuft, parallel zu einer Koordinatenachse verläuft. b. Bestimmen Sie p und q so, dass C in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ liegt.	a. g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2p-3\end{pmatrix}$ 2p−3 = 0 ⇔ p = 1,5 Für p = 1,5 verläuft die gerade parallel zur x_1-Achse. b. $M_{\overline{AB}}$ = (6,5/2/p+1,5) = (6,5/p/q) p = 2 und q = 2 +1,5 = 3,5
8. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}$ und h_u: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\u\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie u ∈ ℝ so, dass sich g und h_u senkrecht im Punkt S(2/4/−1) schneiden.	$2\cdot(-2)+6\cdot(-3)+(-2)\cdot u=0$ $\Leftrightarrow -4-18-2u=0$ $\Leftrightarrow -22-2u=0$ $\Leftrightarrow u=-11$ $\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix} und \begin{pmatrix}-2\\-3\\-11\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear, gleicher Ortsvektor ⇨ Für u = -11 schneiden sich g und h_u senkrecht im Punkt S(2/4/−1).

9. Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die gegenseitige Lage von g und E.	$2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ d.h. die Gerade liegt entweder in der Ebene oder sie ist parallel dazu. Punktprobe: $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} t = -\frac{10}{12} \\ t = -\frac{4}{10} \\ t = -\frac{14}{6} \end{vmatrix}$ => g ist parallel zu E.
10. Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Geradenschar gu: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, u ∈ ℝ. a. Bestimmen Sie u so, dass die Gerade gu senkrecht zur Ebene E verläuft. b. Bestimmen Sie u so, dass die Gerade gu in der Ebene E liegt.	a. $\begin{pmatrix} u \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} = -2u + 50 + 18 = 0 \Leftrightarrow 2u = 68 \Leftrightarrow u = 34$ $\begin{pmatrix} u \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = u - 25 - 9 = 0 \Leftrightarrow u = 34$ Für $u = 34$ verläuft die Gerade senkrecht zur Ebene. b. $\begin{pmatrix} u \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = -1$ (und r = −1) Für $u = -1$ ist der RV von g kollinear zu einem Spannvektor von E und liegt damit bei gleichem Ortsvektor in der Ebene.
11. Gegeben sind die Punkte A(6/2/−2), B(9/4/p) und C(3/5/p·q) mit p, q ∈ ℝ. Bestimmen Sie p so, dass die Ebene, die durch A, B und C aufgespannt wird, parallel zur x_1, x_2 −Ebene verläuft.	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ p+2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ p \cdot q - p \end{pmatrix}$ p + 2= 0 ⇔ p = −2 $p \cdot q - p$ = 0 mit p = −2: $(-2) \cdot q - (-2)$= 0⇔ $-2q + 2$= 0 ⇔ $q = 1$ Für p = −2 und q = 1 ist die Ebene parallel zur x_1, x_2 −Ebene.