kurze Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der linearen Algebra

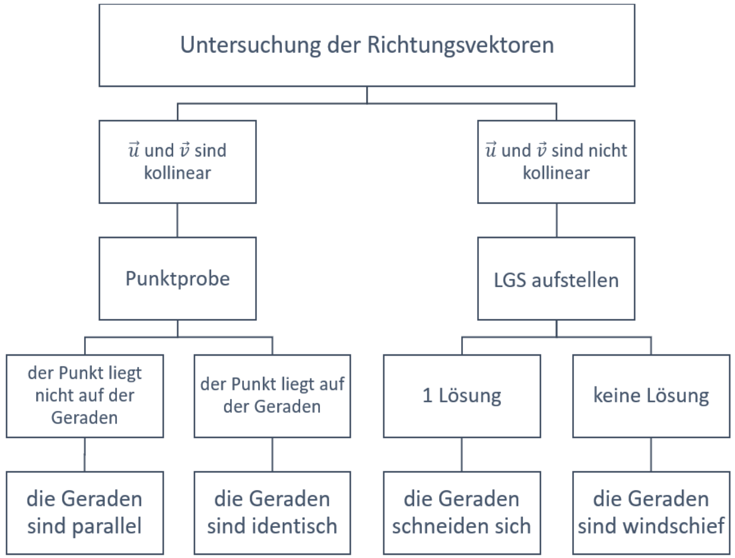
1. Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Begriff	Definition	Beispiel
Vektor	Ein Vektor gibt eine Verschiebung an. Graphisch ist ein Vektor eine Menge von Pfeilen, die gleich lang und parallel sind und in die gleiche Richtung zeigen. Ein Vektor hat 3 Koordinaten, die als Spalte geschrieben werden.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ bedeutet eine Verschiebung um 8 in Richtung x_1-Achse, um 2 in Richtung x_2-Achse und um 6 in Richtung x_3-Achse.
Ortsvektor	Ein Vektor, der den Nullpunkt mit dem Punkt A verbindet.	A(8/2/6) hat den Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
Gegenvektor	Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen Gegenvektoren, wenn $\vec{a} = -\vec{b}$. Graphisch bedeutet das der gleiche Pfeil in umgekehrter Richtung.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ hat den Gegenvektor $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
Addition und Subtraktion von Vektoren	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$
Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$	$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Kolineariät von 2 Vektoren	Es existiert eine reelle Zahl r, sodass: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind kollinear, weil: $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Länge/ Betrag eines Vektors	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$
Einheitsvektor	$\overrightarrow{e_a} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ Der Einheitsvektor hat die Länge 1.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{e_a} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = 32$
Orthogonaliät	Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal, denn: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = 12 - 4 - 8 = 0$
Winkel zwischen 2 Vektoren	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ Bei der Berechnung wird immer der kleinere Winkel berechnet.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2} \cdot \sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{56}{66}) \approx 31{,}95$

2. Geraden

Geradengleichung	g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$, r ∈ ℝ, $\vec{a}$ heißt Stützvektor und $\vec{b}$ heißt Richtungsvektor. Es gibt unendlich viele Gleichungen für eine Gerade.	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$
Aufstellen einer Geradengleichung aus 2 Punkten A und B	g: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$, r ∈ ℝ oder g: $\vec{x} = \overrightarrow{0B} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ oder g: $\vec{x} = A + r \cdot \overrightarrow{BA}$ oder g: $\vec{x} = \overrightarrow{0B} + r \cdot \overrightarrow{BA}$	A(2/3/−5) und B(−7/5/9) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$
Punktprobe: Liegt ein Punkt auf einer Geraden?	Man setzt den Ortsvektor des Punktes mit der Geradengleichung gleich und löst das lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und einer Unbekannten. Wenn es lösbar ist, liegt der Punkt auf der Geraden, sonst nicht.	P (−1/−2/14) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} -1 = 2 - r \\ -2 = -4 + 2r \\ 14 = 5 + 3r \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 3 = r \\ 1 = r \\ 3 = r \end{matrix} \right\|$ Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g.
Winkel zwischen 2 sich schneidenden Geraden	Man berechnet den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren.	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2} \cdot \sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{56}{66}) \approx 31{,}95$

Lage zwischen 2 Geraden	g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ 1. Die Geraden sind parallel. 2. Die Geraden sind identisch. 3. Die Geraden sind windschief. 4. Die Geraden schneiden sich.	

3. Ebenen

Ebenengleichung	E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ $\vec{a}$ heißt Stützvektor und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen Spannvektoren. Es gibt unendlich viele Gleichungen für eine Ebene.	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$
Aufstellen einer Ebenengleichung	• aus 3 Punkten A, B und C: E: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$	• 3 Punkte A(2/5/−4), B(4/−1/9) und C(−3/−6/8) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

	g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ Punkt P • aus 2 parallelen Geraden g und h: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{AB}$ • aus sich schneidenden Geraden g und h: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ • aus einer Geraden g und einem Punkt P: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{AP}$ (Das sind Beispiele, es gibt natürlich noch andere Möglichkeiten)	• parallele Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-8\\6\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-8\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ • sich schneidende Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ • Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und Punkt P(2/5/6) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}-5\\10\\0\end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-6\\10\\0\end{pmatrix}$
Punktprobe: Liegt ein Punkt auf einer Ebene?	Man setzt den Ortsvektor des Punktes mit der Ebenengleichung gleich und löst das lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und einer Unbekannten. Wenn es lösbar ist, liegt der Punkt in der Ebene, sonst nicht.	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ und P(1/4/−7) $\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\3\\-9\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} 0 = -2s + t \\ 3 = s + t \\ -9 = -3s - 3t \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} s = 1 \\ t = 2 \\ -9 = -3s - 3t \end{matrix} \right\rvert$ Überprüfung in III: $-9 = -9$ P liegt in E.

Lage zwischen Gerade und Ebene	• Die Gerade durchstößt die Ebene. • Die Gerade verläuft parallel zur Ebene. • Die Gerade liegt in der Ebene. Man setzt die Geraden- und Ebenengleichungen gleich und erhält ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten.