Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der linearen Algebra

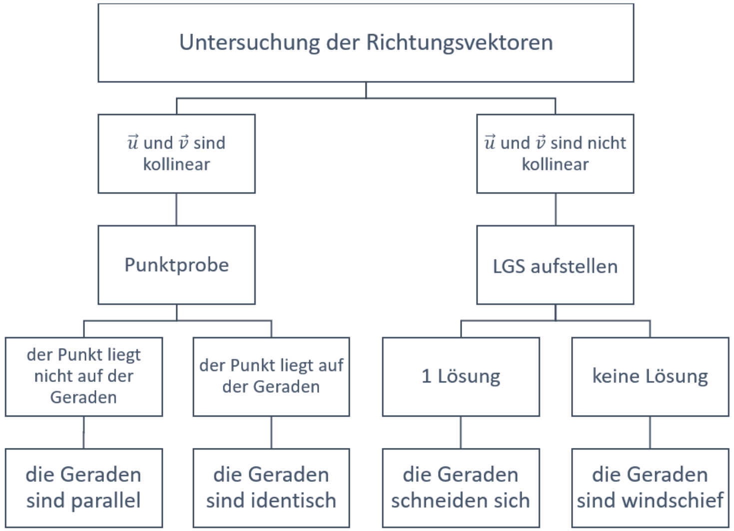
1. Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Begriff	Definition	Beispiel
Vektor	Ein Vektor gibt eine Verschiebung an. Graphisch ist ein Vektor eine Menge von Pfeilen, die gleich lang und parallel sind und in die gleiche Richtung zeigen. Ein Vektor hat 3 Koordinaten, die als Spalte geschrieben werden.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ bedeutet eine Verschiebung um 8 in Richtung x_1-Achse, um 2 in Richtung x_2-Achse und um 6 in Richtung x_3-Achse.
Ortsvektor	Ein Vektor, der den Nullpunkt mit dem Punkt A verbindet.	A(8/2/6) hat den Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
Gegenvektor	Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen Gegenvektoren, wenn $\vec{a} = -\vec{b}$. Graphisch bedeutet das der gleiche Pfeil in umgekehrter Richtung.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ hat den Gegenvektor $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
Addition und Subtraktion von Vektoren	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$
Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$	$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Kollineariät von 2 Vektoren	Es existiert eine reelle Zahl r, sodass: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind kollinear, weil: $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Länge/ Betrag eines Vektors	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$
Einheitsvektor	$\overrightarrow{e_a} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ Der Einheitsvektor hat die Länge 1.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{e_a} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind orthogonal, denn: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = 32$
Orthogonaliät	Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = 12 - 4 - 8 = 0$
Winkel zwischen 2 Vektoren	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ Bei der Berechnung wird immer der kleinere Winkel berechnet.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2} \cdot \sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{56}{66}\right) \approx 31{,}95$

2. Geraden

Geradengleichung	g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$, $r \in \mathbb{R}$, $\vec{a}$ heißt Stützvektor und $\vec{b}$ heißt Richtungsvektor. Es gibt unendlich viele Gleichungen für eine Gerade.	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$
Aufstellen einer Geradengleichung aus 2 Punkten A und B	g: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$, $r \in \mathbb{R}$ oder g: $\vec{x} = \overrightarrow{0B} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ oder g: $\vec{x} = A + r \cdot \overrightarrow{BA}$ oder g: $\vec{x} = \overrightarrow{0B} + r \cdot \overrightarrow{BA}$	A(2/3/−5) und B(−7/5/9) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$
Punktprobe: Liegt ein Punkt auf einer Geraden?	Man setzt den Ortsvektor des Punktes mit der Geradengleichung gleich und löst das lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und einer Unbekannten. Wenn es lösbar ist, liegt der Punkt auf der Geraden, sonst nicht.	P (−1/−2/14) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} -1 = 2 - r \\ -2 = -4 + 2r \\ 14 = 5 + 3r \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 3 = r \\ 1 = r \\ 3 = r \end{matrix} \right\|$ Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g.
Lage zwischen 2 Geraden	g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ 1. Die Geraden sind parallel. 2. Die Geraden sind identisch. 3. Die Geraden sind windschief. 4. Die Geraden schneiden sich.	1. Die Geraden sind parallel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind kollinear, d.h. die Geraden sind parallel oder identisch. Punktprobe: Liegt $P(2/3/1)$ auf h? $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ => $\begin{matrix} s = 0 \\ s = 0{,}25 \\ s = \frac{1}{3} \end{matrix}$ d.h. P liegt nicht auf h Die Geraden sind parallel.



2. Die Geraden sind identisch:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind kollinear, d.h. die Geraden sind parallel oder identisch. Punktprobe: Liegt $P(1/2/3)$ auf h?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 0{,}75 \\ s = 0{,}75 \\ s = 0{,}75 \end{matrix}$$ d.h. P liegt auf h

Die Geraden sind identisch.

3. Die Geraden sind windschief:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3 + r = -3s \\ -2 + 1{,}5r = -4s \\ 9 + 2r = -5s \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3 = s \\ r = -\frac{20}{3} \\ 9 + 2r = -5s \end{matrix} \right|$$

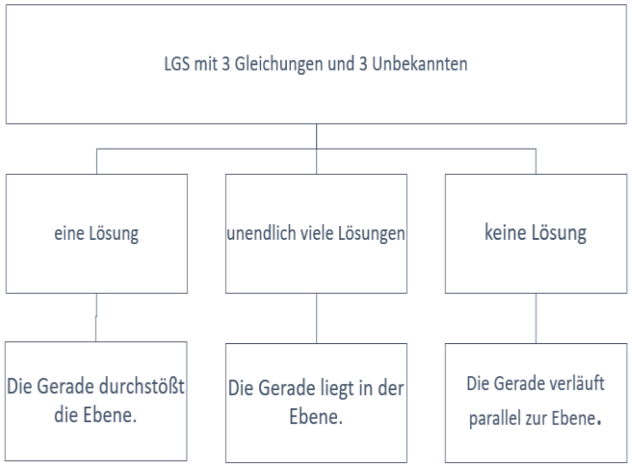
Überprüfen in III: $9 + 2 \cdot \left(-\frac{20}{3}\right) = -5 \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{-13}{3} = -15$ ist offensichtlich falsch.

Die Geraden sind windschief.

		4. Die Geraden schneiden sich: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 8 + 2r = 3s \\ -7 + r = -4s \\ 1 - r = s \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 8 + 2r = 3s \\ r = -1 \\ 2 = s \end{matrix} \right\| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$ Überprüfen in I: $8 + 2 \cdot (-1) = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 6 = 6$ Berechnung des Schnittpunktes: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ Die Geraden schneiden sich in S(5/−6/7).
Winkel zwischen 2 sich schneidenden Geraden	Man berechnet den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren.	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2} \cdot \sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{56}{66}\right) \approx 31{,}95$

3. Ebenen

Ebenengleichung	E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ $\vec{a}$ heißt Stützvektor und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen Spannvektoren. Es gibt unendlich viele Gleichungen für eine Ebene.	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$
Aufstellen einer Ebenengleichung	• aus 3 Punkten A, B und C: E: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$ g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ Punkt P • aus 2 parallelen Geraden g und h: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{AB}$ • aus sich schneidenden Geraden g und h: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ • aus einer Geraden g und einem Punkt P: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{AP}$ (Das sind Beispiele, es gibt natürlich noch andere Möglichkeiten)	• 3 Punkte A(2/5/−4), B(4/−1/9) und C(−3/−6/8) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ • parallele Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ • sich schneidende Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ • Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und Punkt P(2/5/6) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$
Punktprobe: Liegt ein Punkt auf einer Ebene?	Man setzt den Ortsvektor des Punktes mit der Ebenengleichung gleich und löst das lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und einer Unbekannten. Wenn es lösbar ist, liegt der Punkt in der Ebene, sonst nicht.	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und P(1/4/−7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

		$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\3\\-9\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{c} 0=-2s+t\\ 3=s+t\\ -9=-3s-3t\end{array}\right\| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{c} s=1\\ t=2\\ -9=-3s-3t\end{array}\right\|$ Überprüfung in III: $-9=-3-6$ P liegt in E.
Lage zwischen Gerade und Ebene	• schneiden sich in einem Punkt • sind parallel • die Gerade liegt in der Ebene 	1. Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix}$ und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ a. gleichsetzen: $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow r\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{c} 2r+2s-t=-1\\ -5r-s-t=3\\ 5r+3s+3t=1\end{array}\right\| \Leftrightarrow$ $r=-1$, $s=1$, $t=1$ (mit TR oder Gaussverfahren) b. Den Wert in die Gerade einsetzen (oder die beiden Werte in die Ebene): g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$ g und E schneiden sich im Punkt P(0/3/−4) 2. Gerade und Ebene sind parallel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}$ und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ a. Gleichsetzen:

		$\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-r+2s-t=-1\\2r-s-t=3\\-6r+3s+3t=1\end{vmatrix}$ ⇔ keine Lösung g und E sind parallel 3. Gerade liegt in der Ebene: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}$ und E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ a. Gleichsetzen $\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-r+2s-t=1\\2r-s-t=-2\\-6r+3s+3t=6\end{vmatrix}$ ⇔ ∞-viele Lösungen g liegt in E