Lösungen zur Übungsklausur zur Differentialrechnung

Aufgabe	Rechenweg	Ergebnis
1. Berechnen Sie die Ableitung an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten! a. $f(x) = 2x^2$ $x_0 = 3$ b. $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = -1$	$a.\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{2(x_0+h)^2-2(x_0)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot(3+h)^2-2\cdot(3)^2}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot(3)^2+2\cdot 6h+2h^2-2\cdot(3)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{12h+2h^2}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}(12+2h) = 12$ $b.\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h}-\frac{1}{-1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h}+1}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h}+\frac{-1+h}{-1+h}}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h}{-1+h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(-1+h)} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{(-1+h)} = -1$	**12** **-1**
2. Berechnen Sie die Tangente an f(x) im Punkt P_0! a. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$ $P_0 = (3/?)$ b. $f(x) = x^4 - 6x^5$ $P_0 = (-2/?)$	a. $f(3) = 112$ und $f'(x) = 9x^2 + 8x$, d.h. $f'(3) = 105$ $y = 105x + b$ $112 = 105 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -203$ $y = 105x - 203$ b. $f(-2) = 208$ und $f'(x) = 4x^3 - 30x^4$, d.h. $f'(-2) = -512$ $y = -512x + b$ $208 = -512 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -816$ $y = -512x - 816$	a. $y = 105x - 203$ b. $y = -512x - 816$

3. Leiten Sie zweimal ab! a. $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ $b. f(x) = 2x^{-2} + 4x^{-6}$ $c. f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{7}{8}}$ $d. f(x) = \sqrt[3]{x} - 9\sqrt[4]{x^3}$ $e. f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ $f. f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d$ $g. f(u) = 4u^3 + 3u + x^3$ $h. f(z) = 3x + 4z^3 - \sqrt{x}$	a. $f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$ b. $f'(x) = -4x^{-3} - 24x^{-7}$ $f''(x) = 12x^{-4} + 148x^{-8}$ c. $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{7}{8} \cdot x^{\frac{7}{8}-1}$ $= 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}}$ $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{64} \cdot x^{-\frac{9}{8}}$ d. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 9 \cdot x^{\frac{3}{4}}$ $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{27}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$ $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + \frac{27}{16} \cdot x^{-\frac{5}{4}}$ e. $f(x) = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$ $f''(x) = 6 \cdot x^{-4}$ f. $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$ $f''(x) = 6ax - 2b$ g. $f'(u) = 12u^2 + 3$ $f''(u) = 24u$ h. $f'(z) = 12z^2$ $f''(z) = 24z$	a. $f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$ b. $f'(x) = -4x^{-3} - 24x^{-7}$ $f''(x) = 12x^{-4} + 148x^{-8}$ c. $f'(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}}$ $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{64} \cdot x^{-\frac{9}{8}}$ d. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{27}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$ $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + \frac{27}{16} \cdot x^{-\frac{5}{4}}$ e. $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$ $f''(x) = 6 \cdot x^{-4}$ f. $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$ $f''(x) = 6ax - 2b$ g. $f'(u) = 12u^2 + 3$ $f''(u) = 24u$ h. $f'(z) = 12z^2$ $f''(z) = 24z$
4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4x$. a. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen! b. Wo hat der Graph die Steigung 6? c. Wo hat der Graph eine waagerechte Tangente? d. Welche Tangente an f(x) steht senkrecht zu $y = \frac{1}{8}x + 3$?	a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$ $f(0) = 0$ $f'(x) = 2x - 4$ $f'(0) = -4$ $f'(4) = 4$ b. $f'(x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 4 = 6 \Leftrightarrow x = 5$ c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ d. zu zeigen: $f'(x) = -8$ (denn das Produkt der Steigung zweier senkrechter Geraden ist -1) $f'(x) = -8 \Leftrightarrow 2x - 4 = -8 \Leftrightarrow x = -2$ $f(-2) = 12$ $t(x) = -8x + b \Leftrightarrow 12 = -8 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -4$	a. mit der x-Achse: bei 0: $f'(0) = -4$ und bei 4 : $f'(4) = 4$ mit der y-Achse: bei 0: $f'(0) = -4$ b. Der Graph hat bei 5 die Steigung 6. c. Der Graph hat bei 2 eine waagerechte Tangente. d. $t(x) = -8x - 4$

5. Leiten Sie mit Hilfe der Produktregel ab! a. $f(x) = (4x^2 + 12x + 9) \cdot (2x + 3)$ b. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$ c. $f(x) = \ln(x) \cdot (x^2 + 2)$ d. $f(u) = (u^7 - 3) \cdot (u^3 - 4u^{-2})$	a. $f'(x) = (8x + 12) \cdot (2x + 3) + (4x^2 + 12x + 9) \cdot 2$ $= 16x^2 + 24x + 24x + 36 + 8x^2 + 24x + 18$ $= 24x^2 + 72x + 54$ b. $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) + (x^2 + 1) \cdot (-\sin(x))$ $= 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$ c. $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2) + \ln(x) \cdot 2x$ d. $f'(u) = 7u^6 \cdot (u^3 - 4u^{-2}) + (u^7 - 3) \cdot (3u^2 + 8u^{-3})$ $= 7u^9 - 28u^4 + 3u^9 + 8u^4 - 9u^2 - 24u^{-3}$	a. $f'(x) = 24x^2 + 72x + 54$ b. $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$ c. $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2) + \ln(x) \cdot 2x$ d. $f'(u) = 7u^9 - 28u^4 + 3u^9 +$ $8u^4 - 9u^2 - 24u^{-3}$
6. Leiten Sie mit der Kettenregel ab! a. $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x)^4$ b. $f(x) = \sqrt{4x^3 + 5x}$ c. $f(x) = 2 \cdot e^{-3x + 9}$ d. $f(x) = 6 \cdot e^{\sqrt{x+1}}$	a. $f'(x) = 4 \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3 \cdot (3x^2 - 8x + 3)$ $= (12x^2 - 32x + 12) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3$ b. $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12x^2 + 5) = (6x^2 + 2{,}5) \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}}$ c. $f'(x) = 2 \cdot (-3) \cdot e^{-3x + 9} = -6 \cdot e^{-3x + 9}$ d. $f'(x) = 6 \cdot e^{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x+1}}$	a. $f'(x) = (12x^2 - 32x + 12) \cdot (x^3 - 4x^2 +$ $3x)^3$ b. $f'(x) = (6x^2 + 2{,}5) \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}}$ c. $f'(x) = -6 \cdot e^{-3x + 9}$ d. $f'(x) = 3 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x+1}}$
7. a. Wo haben die Funktionen $f(x) = -3x^2 + 12x$ -5 und $g(x) = 2x^3 + 9$ die gleiche Steigung? b. Berechnen Sie, wo der Graph von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ fällt!	a. $f'(x) = -6x + 12$ $\quad g'(x) = 6x^2$ $-6x + 12 = 6x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$ b. gesucht: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 0$ Zuerst muss man die Nullstellen berechnen: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Nun muss man untersuchen, ob $f' < 0$ oder > 0 ist: $x < 2$, z.B. $x = 0$: $f'(0) = 4 > 0$,d.h. $f'(x) > 0$ für $x < 2$ $x > 2$, z.B. $x = 4$: $f'(4) = -8 < 0$ d.h. $f'(x) < 0$ für $x > 2$	a. Die Funktionen haben für $x = -2$ und $x = 1$ die gleiche Steigung. b. Der Graph fällt für alle $x > 2$.