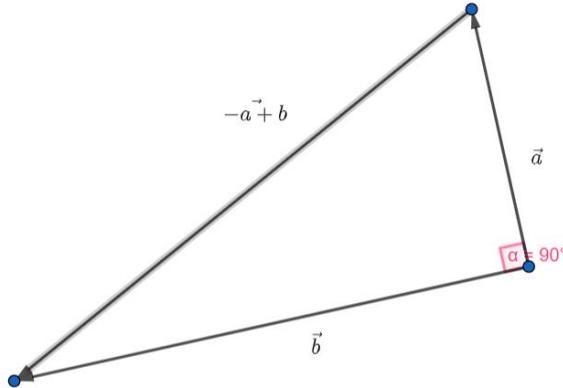


Orthogonalität von Vektoren

Wann stehen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht aufeinander?



Ein Dreieck ist rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$, also:

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind rechtwinklig zueinander genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
 & |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |-\vec{a} + \vec{b}|^2 \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 \\ -a_2 + b_2 \\ -a_3 + b_3 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 \Leftrightarrow & (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})^2 + (\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2})^2 = (\sqrt{(-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 + (-a_3 + b_3)^2})^2 \\
 & \text{Wurzel und Quadrat heben sich auf} \\
 \Leftrightarrow & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 + (-a_3 + b_3)^2 \\
 & \text{2. binomische Formel anwenden} \\
 \Leftrightarrow & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2) \\
 & a_1^2, a_2^2, a_3^2 \text{ und } b_1^2, b_2^2, b_3^2 \text{ auf beiden Seiten abziehen} \\
 \Leftrightarrow & 0 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 \text{ durch } (-2) \text{ teilen} \\
 \Leftrightarrow & 0 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
 \end{aligned}$$

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind orthogonal genau dann, wenn $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

Man definiert den Term $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ als das Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Damit gilt der Satz: Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind orthogonal genau dann, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.