Lösungen zu den Übungen zu Maximum und Minimum: VZW und besondere Funktionen

Aufgabe 1
a. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$ $f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Untersuchung auf VZW bei f‘: $f'(0) = 6$ $f'(2) = 6$ kein VZW kein Extremum
b. $f(x) = x^7 + 3$ $f'(x) = 7x^6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Untersuchung auf VZW bei f‘: $f'(-1) = 7$ $f'(1) = 7$ kein VZW kein Extremum
c. $f(x) = x^4 + 12$ $f'(x) = 4x^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Untersuchung auf VZW bei f‘: $f'(-1) = -4$ $f'(1) = 4$ (VZW von – nach +) $f(0) = 12$ Minimum T(0/12)
d. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 60x^2 + 96x$ $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2$ Untersuchung auf VZW bei f‘: $f'(-5) = -504$ $f'(0) = 96$ $f'(1{,}5) = -16{,}5$ $f'(3) = 168$ (VZW von – nach +) (VZW von + nach –) (VZW von – nach +) $f(-4) = -832$ $f(1) = 43$ $f(2) = 32$ Minimum $T_1(-4/-832)$ Maximum H(1/43) Minimum $T_2(2/32)$
e. $f(x) = 0{,}6x^5 + 3{,}75x^4 + 8x^3 + 6x^2$ $f'(x) = 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 0$

Untersuchung auf VZW bei f‘:

$f'(-3) = 18$ $\quad$ $f'(-1{,}5) = 0{,}5625$ $\quad$ $f'(-0{,}5) = -1{,}6875$ $\quad$ $f'(1) = 54$

kein VZ W $\quad$ (VZW von + nach –) $\quad$ (VZW von – nach +)

$f(-1) = 1{,}15$ $\quad$ $f(0) = 0$

Maximum H(−1/1,15) $\quad$ Minimum T(0/0)

f. $\quad f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 42x^2 + 48x + 24 \qquad f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 84x + 48$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 - 48x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$ (doppelte Nullstelle)

Untersuchung auf VZW bei f´(x):

$f'(-5) = -432$ $\quad$ $f'(0) = 48$ $\quad$ $f'(2) = 72$

(VZW von – nach +) $\quad$ kein VZW

$f(-4) = -584$ $\quad$ Minimum (–4/–584)

g. $\quad f(x) = \sqrt{6}\,x - 3x^2 \qquad f'(x) = \sqrt{6} - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Untersuchung auf VZW bei f´(x):

$f'(0) = \sqrt{6}$ $\quad$ $f'(3) \approx -15{,}56$

(VZW von + nach –)

$f(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 0{,}5$ $\quad$ Maximum $H(\frac{1}{\sqrt{6}}/0{,}5)$

Aufgabe 2

a. $\quad f(x) = x \cdot (1 + x^2)^{-1}$

$f'(x) = 1 \cdot (1 + x^2)^{-1} + x \cdot (-1) \cdot 2x \cdot (1 + x^2)^{-2} = \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 / \cdot (1+x^2)^2$

$\Leftrightarrow (1+x^2) - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Untersuchung auf VZW bei f‘:

$f'(-2) = -\frac{3}{25}$ und $f'(0) = 1$, d.h. VZW von – nach + => Minimum $f(-1) = -0{,}5$

$f'(0) = 1$ und $f'(2) = -\frac{3}{25}$ d.h. VZW von + nach – => Maximum $f(1) = 0{,}5$

Minimum T(−1/ –0,5), Maximum H(1/0,5)

b. f(x) = $(x-2)^3$ f'(x) = $3 \cdot (x-2)^2$ f''(x) = $6 \cdot (x-2)$

f'(x) = 0 ⇔ x = 2 f''(2) = 0

Untersuchung auf VZW bei f': f'(1) = 3 und f'(3) = 3, d.h. kein VZW

kein Maximum und Minimum

---

c. f(x) = $x^2 \cdot \ln(x)$; x >0 f'(x) = $2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$

f''(x) = 2 ln(x) + 2 + 1 = 2ln(x) + 3

f'(x) = 0 ⇔ $2x \cdot \ln(x) + x = 0$ ⇔ $x \cdot [2\ln(x) + 1] = 0$

⇔ x = 0 ($\notin D(f)$) v 2ln(x) = −1 ⇔ x = 0 v x = $e^{-0,5} \approx 0,61$

f''($e^{-0,5}$) = 2 > 0 => Minimum f($e^{-0,5}$) ≈ −0,184

Minimum T($e^{-0,5}$/ ≈ −0,184)

---

d. f(x) = $e^x - x$ f'(x) = $e^x - 1$ f''(x) = e^x

f'(x) = 0 ⇔ $e^x = 1$ ⇔ x = 0

f''(0) = 1 > 0 => Minimum f(0) = 1

Minimum T(0/1)

---

e. f(x) = $2e^{-\frac{x^2}{16}}$ f'(x) = $2e^{-\frac{x^2}{16}} \cdot (-\frac{x}{8}) = -\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{16}}$

f'(x) = 0 ⇔ $-\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{16}} = 0$ ⇔ $-\frac{x}{4}$ v $e^{-\frac{x^2}{16}} = 0$ ⇔ x = 0

Untersuchung auf VZW bei f':

f'(−1) ≈ 0,235 und f'(1) ≈ −0,235, d.h. VZW von + nach − => Maximum

f(0) = 2

Maximum H(0/2)

---

f. f(x) = $\sqrt{5x+1}$;$x > -\frac{1}{5}$

f'(x) = $0,5 \cdot 5 \cdot (5x+1)^{-0,5} = \frac{2,5}{\sqrt{5x+1}}$

f'(x) = 0 ⇔ $\frac{2,5}{\sqrt{5x+1}} = 0$ ⇔ 2,5 = 0 => keine Lösung

kein Maximum und Minimum

---

g. 1 − sin(x) ;x ϵ [π;3 π] f'(x) = −cos(x) f''(x) = sin(x)

f'(x) = 0 ⇔ cos(x) = 0 ⇔ x = 1,5π v x = 2,5 π

f''(1,5π) = sin (1,5π) = −1 < 0 => Maximum f(1,5π) = 2

f''(2,5π) = sin (2,5π) = 1 > 0 => Minimum f(2,5π) = 0

Maximum H(1,5 π/2), Minimum T(2,5 π/0)