Lösung zu Textaufgaben mit Ableitungen

Aufgabe	Lösung
1. Bei einer Person wird über Stunden ständig der Blutzucker (Glukose) gemessen. Die Daten werden dem Patienten dann auf sein Handy übermittelt. Die Funktion $f(x) = 0{,}25x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8{,}5x^2 + 15x + 100$ modelliert den Glukosespiegel im Blut (x: mit $0 \leq x \leq 5$ in Stunden; f(x): Glukosespiegel im Blut in mg/dl) a. Berechnen Sie, wie hoch der Glukosespiegel nach 2 Stunden ist. b. Berechnen Sie, wann der Glukosespiegel am niedrigsten ist und wie hoch die Konzentration zu diesem Zeitpunkt ist. c. Ab einem Glukosespiegel von über 120 mg/dl wird dem Patienten eine Warnung auf sein Handy geschickt. Berechnen Sie, wann dies der Fall ist. d. Berechnen Sie, um wie viel mg/dl der Glukosespiegel im Blut durchschnittlich in den ersten 5 Stunden steigt.	a. $f(2) \approx 102{,}67$ Nach 2 Stunden beträgt der Glukosespiegel im Blut 102,67 mg/dl. b. Gesucht: Tiefpunkt $f'(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ $\quad f''(x) = 3x^2 + 2x - 17$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ $\Leftrightarrow x = -5\ (\notin D(f)) \vee x = 1 \vee x = 3$ $f''(1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $f''(3) = 16 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $f(3) = 97{,}75$ Ränder: $f(0) = 100 > f(3)$ $\quad f(5) = 160{,}42 > f(3)$ Die Glukosekonzentration ist nach 3 Stunden mit 97,75 mg/dl am niedrigsten. c. $f(x) = 120 \Leftrightarrow 0{,}25x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8{,}5x^2 + 15x + 100 = 120$ $\Leftrightarrow 0{,}25x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8{,}5x^2 + 15x - 20 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx -7{,}31 (\notin D(f)) \vee x \approx 4{,}32$ Nach 4,32 Stunden wird dem Patienten eine Warnung geschickt. d. Gesucht: mittlere Änderungsrate $\frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{160{,}42-100}{5} = 12{,}08$ Der Glukosespiegel steigt in den ersten 5 Stunden um durchschnittlich 12,08mg/dl pro Stunde.
2. Die Firma Meier bringt eine neue Schokoladensorte auf den Markt. Aus Erfahrung mit der Verkaufsentwicklung anderer, ähnlicher Produkte weiß man, dass die Funktion $f(t) = -0{,}0001t^3 + 0{,}15t^2 + 15t,\ 0 \leq t \leq 1500$, die Verkaufsentwicklung gut beschreibt. (t: Zeit nach Verkaufsbeginn in Tagen, f(t): verkaufte Stückzahl pro Tag) a. Wie viele Tafeln Schokolade verkauft die Firma nach 700 Tagen? b. An welchem Tag werden die meisten Schokoladen verkauft? c. Mit den Großhändlern ist vereinbart, dass der Lagerbestand erhöht wird, wenn die Zunahme der täglichen Verkaufszahlen am größten ist. Wann tritt dies ein?	a. $f(700) = 49.700$ Es werden 49.700 Tafeln Schokolade verkauft. b. Gesucht ist das Maximum: $f'(t) = -0{,}0003t^2 + 0{,}3t + 15$ $\quad f''(t) = -0{,}0006t + 0{,}3$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}0003t^2 + 0{,}3t + 15 = 0$ $\Leftrightarrow t \approx -47{,}72\ (\notin D(f)) \vee t = 1047{,}72$ $f''(1047{,}72) \approx -0{,}329 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(1047{,}72) = 65363{,}4$ Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$ und $f(1500) = 22500 < 65363{,}4$ Die meisten Tafeln Schokolade werden am 1047. Tag verkauft. c. Gesucht ist der Wendepunkt (mit maximaler Steigung): $f''(t) = -0{,}0006t + 0{,}3$ und $f'''(t) = -0{,}0006$ $f''(t) = -0{,}0006t + 0{,}3 = 0$ $\Leftrightarrow 0{,}0006t = 0{,}3 \Leftrightarrow t = 500$ $f'''(500) = -0{,}0006 < 0 \Rightarrow$ maximale Steigung Untersuchung der Ränder: $f'(500) = 90$; $f'(0) = 15$; $f'(1500) = -210$ Nach 500 Tagen ist die Zunahme der Verkaufszahlen am größten.

3. Eine Telefongesellschaft bringt eine neue Aktie auf den Markt. Der Wert der Aktie kann in den ersten 2 Jahren modelliert werden durch die Funktion $f(x) = 0{,}8x^3 - 30x^2 + 300x$, x in Monaten mit $0 \leq x \leq 24$ und f(x) in €. a. Berechnen Sie, wie viel die Aktie 10 Monate nach ihrer Einführung wert ist. b. Berechnen Sie, wann der Wert der Aktie am höchsten ist und wie viel die Aktie dann wert ist. c. Die Telefongesellschaft will zu dem Zeitpunkt ihre Werbung verstärken, wenn der Wert der Aktie am geringsten steigt. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. d. Die Telefongesellschaft hat den Käufern einen Wert von mehr als 600€ versprochen. Berechnen Sie den Zeitraum, in dem dieses Versprechen eingehalten werden kann. e. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [2;10] und erklären Sie den Wert im Sachzusammenhang.	a. $f(10) = 800$ Zehn Monate danach ist die Aktie 800€ wert. b. Gesucht: Maximum $f'(x) = 2{,}4x^2 - 60x + 300$ $f''(x) = 4{,}8x - 60$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 6{,}9 \vee x \approx 18{,}09$ $f''(6{,}9) \approx -26{,}88 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f''(18{,}09) \approx 26{,}83 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(6{,}9) \approx 904{,}51$ Betrachtung der Ränder: $f(0) = 0$; $f(24) = 979{,}2 > f(6{,}9)$! Der Wert der Aktie ist nach 24 Monaten mit 979,20€ am größten. c. Gesucht: Wendepunkt (mit geringster Steigung) $f''(x) = 4{,}8x - 60$ $f'''(x) = 4{,}8$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow = 4{,}8x - 60 \Leftrightarrow x = 12{,}5$ $f'''(12{,}5) = 4{,}8 > 0 \Rightarrow$ minimalste Steigung $f'(12{,}5) = -75$ Betrachtung der Ränder: $f'(0) = 300$; $f'(24) = 242{,}4$ Nach 12,5 Monaten muss die Werbung geschaltet werden. d. $f(x) = 600 \Leftrightarrow 0{,}8x^3 - 30x^2 + 300x = 600$ $\Leftrightarrow 0{,}8x^3 - 30x^2 + 300x - 600 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 2{,}65 \;\vee\; x \approx 12{,}83 \;\vee\; x \approx 22{,}01$ Zwischenwerte: $f(0) = 0$ $f(10) = 800$ $f(20) = 400$ $f(24) = 979{,}2$ Die Telefongesellschaft kann ihr Versprechen zwischen 2,65 und 12,83 Monaten und zwischen 22,01 und 24 Monaten halten. e. $\frac{f(10)-f(2)}{10-2} = \frac{800-486{,}4}{8} = 39{,}2$ Die Aktie steigt zwischen dem 2. und dem 8. Monat im Schnitt um 39,20€ pro Monat.
4. An einem stürmischen Wettertag wird der Wind in der Zeit von 9 Uhr bis 14 Uhr modelliert durch die Funktion $f(x) = 0{,}25x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8{,}5x^2 + 15x + 50$, x in vergangenen Stunden (seit 9 Uhr), f(x) in km/h. a. Berechnen Sie, wie stark ist der Wind um 11 Uhr ist! b. Berechnen Sie, wann ist der Wind am schwächsten ist! c. Berechnen Sie, wann nimmt der Wind am stärksten zunimmt!	a. 9 Uhr: x = 0 11 Uhr: x = 2 $f(2) = 52{,}\overline{6}$ Der Wind ist weht um 11 Uhr mit einer Geschwindigkeit von $52{,}\overline{6}$ km/h. b. Gesucht ist das Minimum! $f'(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ und $f''(x) = 3x^2 + 2x - 17$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ $\Leftrightarrow x = -5\ (\notin D(f)) \vee x = 1 \vee x = 3$ $f''(1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f''(3) = 16 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(3) = 47{,}75$ Betrachtung der Ränder: $f(0) = 50 > f(3)$ $f(5) \approx 110{,}42 > f(3)$ Der Wind ist um 12 Uhr mit 47,75 km/h am schwächsten. c. Gesucht: Wendepunkt (mit maximaler Steigung) $f''(x) = 3x^2 + 2x - 17$ und $f'''(x) = 6x + 2$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 17 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx -2{,}73 (\notin D(f)) \;\vee\; x \approx 2{,}07$ $f'''(2{,}07) = 14{,}42 > 0 \Rightarrow$ minimale Steigung d.h. die maximale Steigung liegt in den Rändern: $f'(0) = 15$ $f'(5) = 80$ Der Wind nimmt am stärksten um 14 Uhr zu.