Lösung zu den Textaufgaben zu quadratischen Funktionen

1. In einer Stadt wird die Temperatur an einem Tag durch die Funktion $f(x) = -0{,}25x^2 + 6x - 11$ modelliert, x in Uhrzeit mit $0 \leq x \leq 24$, f(x) in Grad Celsius. a. Berechne die Temperatur um 10 Uhr. b. Berechne, wann die Temperatur 9° C beträgt. c. Berechne, wann die Temperatur über 0° C liegt. d. Berechne die Höchsttemperatur.	a. $f(10) = 24$ Um 10 Uhr sind es 24° C. b. $-0{,}25x^2 + 6x - 11 = 9 \Leftrightarrow -0{,}25x^2 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 80 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-24}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2 - 80} = 12 \pm \sqrt{64} = 12 \pm 8$ $\Leftrightarrow x_1 = 4 \vee x_2 = 20$ Um 4 Uhr und um 20 Uhr beträgt die Temperatur 9° C. c. $-0{,}25x^2 + 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 44 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-24}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2 - 44} = 12 \pm \sqrt{100} \approx 12 \pm 10$ $\Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = 22$ [und $f(10) > 0$] Zwischen 2 und 22 Uhr liegt die Temperatur über 0° C. d. $-0{,}25x^2 + 6x - 11 = -0{,}25 \cdot (x^2 - 24x + 44)$ $= -0{,}25 \cdot (x^2 - 24x + 12^2 - 12^2 + 44)$ $= -0{,}25 \cdot ((x^2 - 12)^2 - 144 + 44)$ $= -0{,}25 \cdot ((x^2 - 12)^2 - 100) = = -0{,}25 \cdot (x^2 - 12)^2 + 25$ Scheitelpunkt (12|25) Die Temperatur ist um 12 Uhr mit 25°C am höchsten.
2. Ein Medikament wird in den Körper injiziert und seine Konzentration f(x) im Blut wird durch die quadratische Funktion f(x) mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 10$ beschrieben, wobei f(x) die Konzentration in mg/l und x die Zeit in Stunden nach der Injektion ist. a. Berechne die Konzentration des Medikamentes im Blut nach 2 Stunden. b. Berechne, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Medikaments im Blut am höchsten ist.	a. $f(2) = 16$ Nach 2 Stunden sind 16mg/l im Blut vorhanden. b. $-0{,}5x^2 + 4x + 10 = -0{,}5 \cdot (x^2 - 8x - 20)$ $= -0{,}5 \cdot (x^2 - 8x + 16 - 16 - 20)$ $= -0{,}5 \cdot ((x - 4)^2 - 36) = -0{,}5 \cdot (x - 4)^2 + 18$ Scheitelpunkt (4|18) Nach 4 Stunden ist die Konzentration am höchsten.

c. Berechne, wann die Konzentration des Medikaments im Blut unter 5 mg/l fällt.	c. f(x) = 5 ⇔ $-0{,}5x^2 + 4x + 10 = 5$ ⇔ $-0{,}5x^2 + 4x + 5 = 0$ $\mid \cdot (-2)$ ⇔ $x^2 - 8 - 10 = 0$ ⇔ $x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 10} = 4 \pm \sqrt{26} \approx 4 \pm 5{,}01$ ⇔ $x_1 \approx -1{,}01$ v $x_2 \approx 9{,}01$ Nach ca. 9 Stunden fällt die Konzentration unter 5 mg/l.
3. Ein Brückenbogen über einen Fluss hat die Form einer Parabel und kann durch die Gleichung $f(x) = -0{,}5 \cdot (x-2)^2 + 8$ beschrieben werden, wobei f(x) die Höhe in Metern über dem Wasser und x die horizontale Entfernung in Metern vom linken Ufer ist. a. Berechne, wie breit der Brückenbogen ist. b. Bestimme, wie hoch der Bogen der Brücke über dem Wasser an seiner höchsten Stelle ist. c. Berechne, wie hoch der Brückenbogen 3m vom linken Ufer entfernt ist. d. Zur Verstärkung soll im oberen Bereich der Brücke eine Metallstange entlang der Geraden g(x) = x + 6 angebracht werden. Berechne die Ankerpunkte der Metallstange.	a. $-0{,}5 \cdot (x-2)^2 + 8 = 0$ ⇔ $-0{,}5 \cdot (x-2)^2 = -8$ ⇔ $(x-2)^2 = 16$ ⇔ $x - 2 = \pm\sqrt{16}$ ⇔ $x - 2 = \pm 4$ $\mid +2$ ⇔ $x = -4 + 2 = -2$ v $x = 4 + 2 = 6$ Die Brücke ist 8 m breit. b. Scheitelpunkt S(2|8) kann man ablesen. Die Brücke ist 8 m hoch. c. f(1) = 7,5 3m vom linken Ufer ist die Brücke 7,5 m hoch. d. $-0{,}5 \cdot (x-2)^2 + 8 = x + 6$ ⇔ $-0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 8 = x + 6$ ⇔ $-0{,}5x^2 + 2x - 2 + 8 = x + 6$ ⇔ $-0{,}5x^2 + x = 0$ ⇔ $x \cdot (-0{,}5x + 1) = 0$ ⇔ $x = 0$ v $-0{,}5x + 1 = 0$ ⇔ $x = 0$ v $x = 2$ g(0) = 6 und g(2) = 8 Man muss die Metallstange an den Punkten $P_1(0\|6)$ und $P_2(2\|8)$ befestigen.
4. Ein Unternehmen stellt ein neues Produkt her. Der erwartete Gewinn f(x) in Euro kann durch die Gleichung $f(x) = -0{,}1x^2 + 60x - 210$ modelliert werden, x in Monaten. a. Wann hat das Unternehmen den Break-even-Punkt erreicht? b. Berechne, wann das Unternehmen den maximalen Gewinn erzielt.	a. $-0{,}1x^2 + 60x - 210 = 0 \mid \cdot (-10)$ ⇔ $x^2 - 600x + 2100 = 0$ ⇔ $x_{1,2} = -\frac{-600}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{600}{2}\right)^2 - 2100} = 300 \pm \sqrt{87.900} \approx 300 \pm 296{,}48$ ⇔ $x_1 \approx 3{,}52$ v $x_2 \approx 596{,}48$ Nach ca. 3,5 Monaten ist der Break-even-Punkt erreicht. b. $f(x) = -0{,}1x^2 + 60x - 210 = f(x) = -0{,}1(x^2 - 600x + 2100)$ $= -0{,}1 \cdot (x^2 - 600x + 90.000 - 90.000 + 2100)$ $= -0{,}1 \cdot ((x - 300)^2 - 87.900) = -0{,}1 \cdot (x - 300)^2 + 8790$ Nach 300 Monaten erzielt das Unternehmen seinen maximalen Gewinn.

c. Berechne, wann das Unternehmen einen Gewinn von 1.000 € macht. d. Das Unternehmen möchte ein zweites ähnliches Produkt auf den Markt bringen, dessen erwarteter Gewinn durch die Funktion g(x) mit $g(x) = -0{,}05x^2 + 50x - 300$ modelliert wird. Wann lohnt es sich, auf das zweite Produkt umzustellen?	c. $f(x) = 1.000 \Leftrightarrow -0{,}1x^2 + 60x - 210 = 1.000$ $\Leftrightarrow -0{,}1x^2 + 60x - 1.210 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 600x + 12.100 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-600}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{600}{2}\right)^2 - 12.100} = 300 \pm \sqrt{77.900} \approx 300 \pm 279{,}1$ $\Leftrightarrow x_1 \approx 20{,}9 \vee x_2 \approx 579{,}1$ Nach ca. 21 und 580 Monaten beträgt der Gewinn 1.000 €. d. $-0{,}1x^2 + 60x - 210 = -0{,}05x^2 + 50x - 300 \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 10x + 90 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 200x - 1800 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-200}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200}{2}\right)^2 + 1800} \approx 100 \pm 108{,}63$ $\Leftrightarrow x_1 \approx -8{,}63 \vee x_2 \approx 208{,}63$ und $f(0) > g(0)$ Nach 209 Monaten wäre es besser, auf das 2. Produkt zu setzen.
5. In einer Petrischale wachsen Bakterien. Die Anzahl der Bakterien f(x) kann durch die quadratische Funktion f(x) mit $f(x) = -2x^2 + 20x + 100$ modelliert werden, wobei f(x) in 1.000 Bakterien und x die Zeit in Stunden ist. a. Berechne, wann die Bakterien vollständig verschwunden sind. b. Berechne, nach welcher Zeit die Anzahl der Bakterien unter 50.000 sinkt. c. Berechne die Anzahl der Bakterien nach 4 Stunden. d. Berechne, wann die meisten Bakterien vorhanden sind und bestimme, wie viele es dann sind.	a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 50 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 50} = 5 \pm \sqrt{75} \approx 5 \pm 8{,}66$ $\Leftrightarrow x_1 \approx -3{,}66 \vee x_2 \approx 13{,}66$ Nach ca. 13,66 Stunden sind die Bakterien vollständig verschwunden. b. $f(x) = 50 \Leftrightarrow -2x^2 + 20x + 100 = 50 \Leftrightarrow\Leftrightarrow -2x^2 + 20x + 50 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 25 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 25}$ $= 5 \pm \sqrt{50} \approx 5 \pm 7{,}07 \Leftrightarrow x_1 \approx -2{,}07 \vee x_2 \approx 12{,}07$ Nach ca. 12,07 Stunden sinkt die Anzahl der Bakterien unter 50.000. c. $f(4) = 148$ Nach 4 Stunden sind 148.000 Bakterien vorhanden. d. $f(x) = -2\cdot(x^2 - 10x - 50) = -2\cdot((x-5)^2 - 25 - 50) = -2\cdot(x-5)^2 + 150$ Nach 5 Stunden sind die meisten Bakterien vorhanden, es sind dann 150.000 Bakterien.