

Lösungen zu den Textaufgaben zum Mittelwert einer Funktion

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
<p>1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner eine reelle Zahl a so, dass der Mittelwert der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ über dem Integral $[0;a]$ den Wert 9 annimmt!</p>	$\frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x) dx = 9$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_0^a = 9$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 + 6a \right) = 9$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 + 2a + 6 = 9 / -9$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 + 2a - 3 = 0 / \cdot (-3)$ $\Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$ $\Leftrightarrow a_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9} = 3$	<p>Für $a = 3$ ist der Mittelwert 9.</p>
<p>2. Der Goldpreis wird in den ersten 4 Tagen durch die Funktion $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 20x + 30$ modelliert, x in Tagen, $f(x)$ in €/g.</p> <p>a. Berechnen Sie den Durchschnittspreis in den ersten 4 Tagen!</p> <p>b. Berechnen Sie, nach wieviel Tagen der Durchschnittspreis 36€/g beträgt!</p> <p>c. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Preis 36€/g beträgt!</p>	<p>a. $\frac{1}{4} \cdot \int_0^4 f(x) dx$ $= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 30x \right]_0^4 = \frac{1}{4} \cdot 152 = 38$</p> <p>b. $\frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x) dx = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 30x \right]_0^a = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}a^4 - 4a^3 + 10a^2 + 30a \right) = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^3 - 4a^2 + 10a + 30 = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^3 - 4a^2 + 10a - 6 = 0 \Leftrightarrow a \approx 0,869$</p> <p>c. $2x^3 - 12x^2 + 20x + 30 = 36$ $\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 20x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 0,38 \vee x \approx 2,62 \vee x \approx 3$</p>	<p>a. Der Durchschnittspreis in den ersten 4 Tagen beträgt 38€/g.</p> <p>b. Nach 0,87 Tagen (oder nach 20,856 Stunden) beträgt der Durchschnittspreis 36€/g.</p> <p>c. Nach 0,38, und 2,62 und nach 3 Tagen beträgt der Preis 36€/g.</p>

<p>3. Die Wechselrate zwischen Dollar und Euro wird durch die Funktion $f(x) = 0,044x^3 - 0,33x^2 + 0,56x + 1$ modelliert, x in Stunden mit $0 < x < 5$, $f(x)$ in Dollar pro Euro.</p> <p>a. Berechnen Sie den durchschnittlichen Wechselkurs in den ersten drei Stunden!</p> <p>b. Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate des Wechselkurses in den ersten vier Stunden und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang!</p> <p>c. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt man am besten Euros in Dollars umtauschen sollte!</p>	<p>a. $\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 f(x) dx$ $= \frac{1}{3} \cdot [0,011x^4 - 0,11x^3 + 0,28x^2 + x]_0^3$ $= \frac{1}{3} \cdot 3,441 = 1,147$</p> <p>b. $\frac{1}{4} \cdot [f(4) - f(0)] = \frac{1}{4} \cdot [0,776 - 1] = -0,056$</p> <p>c. Gesucht: Minimum $f'(x) = 0,132x^2 - 0,66x + 0,56$ $f''(x) = 0,264x - 0,66$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,08 \vee x \approx 3,92$ $f''(1,08) \approx -0,37 < 0 \Rightarrow \text{HP}$ $f''(3,92) \approx 0,37 > 0 \Rightarrow \text{TP}$ $f(3,92) \approx 0,775$ [Ränder: $f(0) = 1$ und $f(5) = 1,05$]</p>	<p>a. Der durchschnittliche Wechselkurs in den ersten drei Stunden beträgt 1,147 Dollar pro Euro.</p> <p>b. Die durchschnittliche Änderungsrate beträgt $-0,056$, d.h. im Schnitt fällt der Wechselkurs des Dollars in den ersten vier Stunden um 5,6 Cent pro Stunde.</p> <p>c. Man sollte am besten nach 3,92 Tagen umtauschen.</p>
<p>4. Die Geschwindigkeit eines Autos wird durch die Funktion $f(x) = -0,3x^2 + 6x$ modelliert, x in Sekunden mit $0 < x < 12$, $f(x)$ in m/sec.</p> <p>a. Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 8 Sekunden in km/h!</p> <p>b. Berechnen Sie, wann das Auto am schnellsten fährt!</p> <p>c. Berechnen Sie, wie weit das Auto nach 7 Sekunden gefahren ist!</p>	<p>a. $\frac{1}{8} \cdot \int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{8} \cdot [-0,1x^3 + 3x^2]_0^8 = \frac{1}{8} \cdot 140,8 = 17,6$ $17,6 \text{ m/sec} = 63,36 \text{ km/h}$</p> <p>b. Gesucht: Maximum: $f'(x) = -0,6x + 6$ $f''(x) = -0,6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ $f''(10) = -0,6 < 0 \Rightarrow \text{HP}$ und $f(10) = 30$ [Ränder: $f(0) = 0$ und $f(12) = 28,8$]</p> <p>c. $\int_0^7 f(x) dx = [-0,1x^3 + 3x^2]_0^7 = 112,7$</p>	<p>a. Die durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 8 Sekunden beträgt 63,36 km/h.</p> <p>b. Das Auto fährt nach 10 Sekunden am schnellsten.</p> <p>c. Das Auto ist 112,7m gefahren.</p>