

Lösungen zu den Steckbriefaufgaben

Aufgabe 1:

Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die durch die Punkte P(1/5), Q(-2/26) und R(3/21) geht!

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(1/5) \text{ einsetzen: } a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5$$

$$Q(-2/26) \text{ einsetzen: } a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 26$$

$$R(3/21) \text{ einsetzen: } a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 21$$

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} a + b + c = 5 \\ 4a - 2b + c = 26 \\ 9a + 3b + c = 21 \end{array} \right. \begin{array}{l} I \\ (-1) \cdot II \\ (-1) \cdot III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + b + c = 5 \\ -4a + 2b - c = -26 \\ -9a - 3b - c = -21 \end{array} \right. \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + b + c = 5 \\ -3a + 3b = -21 \\ -8a - 2b = -16 \end{array} \right. \begin{array}{l} I \\ I + II \\ I + III \end{array} \end{array}$$

Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} -3a + 3b = -21 \\ -8a - 2b = -16 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -6a + 6b = -42 \\ -24a - 6b = -48 \end{array} \right. \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -6a + 6b = -42 \\ -30a = -90 \end{array} \right. \begin{array}{l} I \\ I + II \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} -6 \cdot 3 + 6b = -42 \\ a = 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} I \\ I + II \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = -4 \\ a = 3 \end{array} \right.$$

Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $a + b + c = 5$:

$$3 - 4 + c = 5 \Leftrightarrow c = 6$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

Aufgabe 2:

Gesucht ist die Funktion dritten Grades, die durch den Ursprung geht, in $P(4/-\frac{80}{3})$ ein Minimum und in $x = -2$ ein Maximum hat.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Da sie durch den Ursprung geht, ist $d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$P(4/-\frac{80}{3}) \text{ einsetzen: } 64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3}$$

$$\text{Minimum bei } x = 4: f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$$

$$\text{Maximum bei } x = -2: f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b + c = 0$$

Man erhält das folgende Gleichungssystem, das man wie oben löst:

$$\left| \begin{array}{l} 64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3} \\ 48a + 8b + c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} I: (-4) \\ (-1) \cdot II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -16a - 4b - c = \frac{20}{3} \\ -48a - 8b - c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \left| \begin{array}{l} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} I + III \\ II + III \\ III \end{array}$$

Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \end{array} \right| \cdot (-9) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 36a + 72b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{array} \right| \text{II} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 60b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{array} \right| \text{II} \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} b = -1 \\ -36a - 12 \cdot (-1) = 0 \end{array} \right| \text{I in II} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = -1 \\ a = \frac{1}{3} \end{array} \right|$$

Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $12a - 4b + c = 0$:

$$4 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$$

Aufgabe 3:

Welche zum Ursprung punktsymmetrische Funktion dritten Grades hat in $x_0 = 1$ ein Minimum und geht durch den Punkt $P(2/4)$?

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Da sie durch den Ursprung geht, ist $d = 0$.

Da sie punktsymmetrisch ist, kann sie nur ungerade Exponenten enthalten, also ist $b = 0$.

$$f(x) = ax^3 + cx$$

$$P(2/4) \text{ einsetzen: } 8a + 2c = 4$$

$$f'(x) = 3ax^2 + c$$

$$\text{Minimum bei } x_0 = 1: f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 0$$

Man erhält das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} 8a + 2c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8a + 2c = 4 \\ c = -3a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8a + 2 \cdot (-3a) = 4 \\ c = -3a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2a = 4 \\ c = -3a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 2 \\ c = -6 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 6x$$

Aufgabe 4:

Gesucht ist eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades, die die y-Achse bei 4 schneidet. Sie hat in $P(2/804)$ einen Wendepunkt!

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

f ist achsensymmetrisch \Rightarrow alle ungeraden Potenzen entfallen, d.h. $b = 0$ und $d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

$$P(0/4) \Rightarrow e = 4 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + 4$$

$$f(2) = 804 \Leftrightarrow 16a + 4c + 4 = 804$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2c$$

$$f''(2) = 0 \Leftrightarrow 48a + 2c = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 16a + 4c + 4 = 804 \\ 48a + 2c = 0 \\ a = -10 \\ 240 = c \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 16a + 4c = 800 \\ -24a = c \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 16a + 4 \cdot (-24a) = 800 \\ -24a = c \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -80a = 800 \\ -24a = c \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -10x^4 + 240x^2 + 4$$

Aufgabe 5:

Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die die x-Achse bei 3 schneidet und im Punkt P(-1/-32) eine waagerechte Tangente hat!

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(3/0) \text{ einsetzen} \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$$

$$P(-1/-32) \text{ einsetzen} \Rightarrow a - b + c = -32$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = -32 \\ -2a + b = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 9a + 6a + c = 0 \\ a - 2a + c = -32 \\ b = 2a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 15a + c = 0 \\ -a + c = -32 \\ b = 2a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 15a + a - 32 = 0 \\ c = a - 32 \\ b = 2a \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 2 \\ c = 2 - 32 = -30 \\ b = 2 \cdot 2 = 4 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 30$$

Aufgabe 6:

Welche achsensymmetrische Funktion zweiten Grades, die die y-Achse bei 8 schneidet, schließt mit der x-Achse im Intervall [0;1] eine Fläche von $\frac{22}{3}$ ein?

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

f ist achsensymmetrisch \Rightarrow alle ungeraden Potenzen entfallen $\Rightarrow b = 0$

$$f(x) = ax^2 + c$$

$$P(0/8) \text{ einsetzen: } c = 8 \Rightarrow f(x) = ax^2 + 8$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax^2 + 8) dx &= \frac{22}{3} \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}ax^3 + 8x \right]_0^1 &= \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + 8 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow a = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^2 + 8$$