

Anleitung zur Bestimmung eines Schnittpunktes von 2 Geraden im dreidimensionalen Raum

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ und

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad | - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Aufstellen und Berechnen des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} -1 + 8r = 2s \\ 18 + 6r = -6s \\ 4 - 12r = -4s \end{cases}$$

Man berechnet zuerst ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

$$\begin{cases} -1 + 8r = 2s \\ 18 + 6r = -6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 24r = 6s \\ 18 + 6r = -6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 + 30r = 0 \\ 18 + 6r = -6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -0,5 \\ 18 + 6r = -6s \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r = -0,5 \\ 18 - 3 = -6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -0,5 \\ s = -2,5 \end{cases}$$

Anschließend setzt man die Werte in die nicht benutzte Gleichung ein:

$$4 - 12r = -4s$$

$$4 - 12 \cdot (-0,5) = -4 \cdot (-2,5) \Leftrightarrow 4 + 6 = 10$$

Sollte sich nun in dieser Zeile ein Widerspruch ergeben (z.B. $3 = 5$), so schneiden sich die Geraden nicht.

3. Einsetzen von r oder s in eine Gleichung, um den Schnittpunkt zu berechnen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + (-0,5) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ d.h. der Schnittpunkt ist: } S(-7/16/12)$$