Arbeitsblatt: Lage von Gerade und Ebene in Parameterform:

1. Die Gerade g schneidet die Ebene E

Gegeben ist E: $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lage und berechnen Sie gegebenenfalls den Durchstoßpunkt!

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ d.h. $\begin{matrix} x_1 & = & 4 & + & 2t \\ x_2 & = & 6 & + & 4t \\ x_3 & = & 2 & + & 6t \end{matrix}$

Dies setzt man in die Ebenengleichung E: $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 0$ ein:

$4 \cdot x_1 \quad +2 \cdot x_2 \quad +12 \cdot x_3 \quad = 0$

$4 \cdot (4 + 2t) + 2 \cdot (6 + 4t) + 12 \cdot (2 + 6t) = 0$

$16 + 8t + 12 + 8t + 24 + 36t = 0$

$52 + 52t = 0$

$52t = -52$

$t = -1$

Nun berechnet man den Durchstoßpunkt, indem man den Wert von t in die Geradengleichung einsetzt:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

d.h. die Gerade schneidet die Ebene im Durchstoßpunkt D(2/2/-4)

2. E und g sind parallel

Gegeben ist E: $x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ d.h. $\begin{matrix} x_1 & = & 4 & + & 2t \\ x_2 & = & 6 & + & 4t \\ x_3 & = & 2 & + & 6t \end{matrix}$

Dies setzt man in die Ebenengleichung E: $x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ ein:

$x_1 \quad + 2{,}5 \cdot x_2 \quad - 2 \cdot x_3 = 0$

$(4 + 2t) + 2{,}5 \cdot (6 + 4t) - 2 \cdot (2 + 6t) = 0$

$4 + 2t + 15 + 10t - 4 - 12t = 0$

$15 = 0$ Widerspruch => E und g sind parallel

3. g liegt in E

Gegeben ist E: $x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ d.h. $\begin{aligned} x_1 &= 4 + 2t \\ x_2 &= 6 + 4t \\ x_3 &= 9{,}5 + 6t \end{aligned}$

Dies setzt man in die Ebenengleichung E: $x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ ein:

$x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$

$(4 + 2t) + 2{,}5 \cdot (6 + 4t) - 2 \cdot (9{,}5 + 6t) = 0$

$4 + 2t + 15 + 10t - 19 - 12t = 0$

$0 = 0$ allgemeingültig => g liegt in E