

Lösung zu den Übungen zur Lage zwischen Ebenen in Parameterform und Geraden mit Taschenrechner

1. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 + 4r + 2s = 6 - 2t \\ 6 + 3r - 4s = 4 - 3t \\ -2 + r + 3s = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow r = 1,75, s = 1,25, t = -0,75$$

Einsetzen in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 0,75 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 6,25 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

Die Gerade durchstößt die Ebene im Punkt $D(7,5 | 6,25 | 3,5)$!

2. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -2 + 4r + 2s = 6 - 2t \\ 6 + 3r + 9s = 4 - 6t \\ -2 + r + 3s = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow IL = \emptyset$$

Die Gerade und die Ebene sind parallel.

3. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -4 + r + s = 5 + t \\ -5 + r + 2s = 10 + 4t \\ -10 + r + 3s = 13 + 9t \end{cases} \Leftrightarrow r = 5, s = 3, t = -1$$

Einsetzen in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Gerade durchstößt die Ebene im Punkt $D(4 | 6 | 4)$.

4. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -1 + 2r - s = 4 - 4t \\ -1 + 5r + 2s = 6 + 10t \\ -1 + 12r - 9s = 10 + 8t \end{cases} \Leftrightarrow r = 2, s = 1, t = 0,5$$

Einsetzen in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$

Die Gerade durchstößt die Ebene im Punkt D(2 | 11 | 14).

$$5. \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 + 3r - 4s = 8 - 2t \\ -65r - 3s = -3 - 4t \\ 3 - 2r + 5s = -4 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow r = 2, s = -3, t = -4$$

$$\text{Einsetzen in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Die Gerade schneidet die Ebene im Punkt D(16 | 13 | -16).

$$6. \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 + r + 2s = 3 - 3t \\ -15 + 5r + 6s = -7 - 7t \\ -1 + 9r + 10s = 11 - 11t \end{cases} \quad \text{unendliche viele Lösungen}$$

Die Gerade g liegt in der Ebene E.

$$7. \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ 7 \\ -50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -24 + 3r + 6s = 2 + 12t \\ 7 + r + 5s = -5 - 20t \\ -50 + 5r + 7s = 9 + 50t \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{352}{9}, s = -\frac{122}{12}, t = \frac{5}{6}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{-65}{3} \\ \frac{152}{3} \end{pmatrix}$$

Die Gerade durchstößt die Ebene im Punkt D(12 | $\frac{-65}{3}$ | $\frac{152}{3}$).

$$8. \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 2r + 4s = -3 - 4t \\ 1 + 2r + 3s = 2 - t \\ 7 + 3r + 5s = 6 - 3t \end{cases} \quad \text{unendliche viele Lösungen}$$

Die Gerade liegt in der Ebene.