

Lösung Kurvendiskussion von zusammengesetzten e-Funktionen

$$f(x) = 2x^2 \cdot e^{-0,1x}$$

Nullstellen:

$$2x^2 \cdot e^{-0,1x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee e^{-0,1x} = 0 \quad (\text{ein Produkt ist 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist})$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{-0,1x} \neq 0$$

Nullstellen: $x = 0$

Extrema:

$$f'(x) = 4x \cdot e^{-0,1x} + 2x^2 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1x} = e^{-0,1x} \cdot (4x - 0,2x^2) \quad (\text{mit Ketten- und Produktregel})$$

$$\text{notwendige Bedingung: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,1x} \cdot (4x - 0,2x^2)$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1x} = 0 \vee 4x - 0,2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1x} \neq 0 \vee x = 0 \vee x = 20$$

$$f''(x) = e^{-0,1x} \cdot (4x - 0,2x^2) \cdot (-0,1) + e^{-0,1x} \cdot (4 - 0,4x) = (0,02x^2 - 0,8x + 4) \cdot e^{-0,1x}$$

$$\text{notwendige und hinreichende Bedingung: } f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0:$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(0) = 0$$

$$f''(20) = -2,7 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(20) \approx 108,27$$

HP(20/≈108,27) TP(0/0)

Wendepunkte:

$$\text{notwendige Bedingung: } f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (0,02x^2 - 0,8x + 4) \cdot e^{-0,1x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1x} = 0 \vee 0,02x^2 - 0,8x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1x} \neq 0 \quad x \approx 5,86 \vee x \approx 34,14$$

$$\text{notwendige und hinreichende Bedingung: } f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0:$$

$$f'''(x) = (-0,002x^2 + 0,12x - 1,2) \cdot e^{-0,1x}$$

$$f'''(5,86) \approx -0,31 \neq 0 \quad (\text{maximale Steigung}) \quad f(5,86) \approx 38,22$$

$$f'''(34,14) \approx 0,01 \neq 0 \quad (\text{minimale Steigung}) \quad f(34,14) \approx 76,71$$

W₁(5,85/≈ 38,22) W₂(34,14/≈ 76,71)

Krümmungsverhalten:

$$x < 5,85, \text{ z.B. } x = 0: f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$5,85 < x < 34,14, \text{ z.B. } x = 10: f''(10) \approx -0,74 < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt}$$

$$x > 34,14, \text{ z.B. } x = 40: f''(40) \approx 0,073 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

f ist linksgekrümmt für $x < 5,85$

f ist linksgekrümmt für $x > 34,14$

f ist rechtsgekrümmt für $5,85 < x < 34,14$

Grenzverhalten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = \infty$$

da die Steigung der e-Funktion stärker ist als die jeder ganzrationalen Funktion, bestimmt die e-Funktion das Verhalten des Graphen im Unendlichen

$$f(x) = (4 + 4x) \cdot e^{2x}$$

Nullstellen:

$$f(x) = (4x + 4) \cdot e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = -4 \quad (e^{4x} \neq 0) \Leftrightarrow x = -1$$

Nullstelle: $x = -1$

Extrema:

$$f'(x) = 4 \cdot e^{2x} + (4x + 4) \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (4 + 8x + 8) = e^{2x} \cdot (8x + 12)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 8 \cdot e^{2x} + (8x + 12) \cdot e^{2x} \cdot 2 \\ &= e^{2x} \cdot (8 + 16x + 24) = e^{2x} \cdot (16x + 32) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{2x} \cdot (8x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 12 = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x = -12 \quad (e^{2x} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f''(-\frac{3}{2}) = e^{-3} \cdot (-24 + 32) = 8 \cdot e^{-3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(-\frac{3}{2}) = -2 \cdot e^{-3} \approx -0,0996$$

TP($-\frac{3}{2} / -2 \cdot e^{-3}$)

Wendepunkte:

$$f''(x) = e^{2x} \cdot (16x + 32)$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 16 \cdot e^{2x} + (16x + 32) \cdot e^{2x} \cdot 2 \\ &= e^{2x} \cdot (16 + 32x + 64) = e^{2x} \cdot (32x + 80) \end{aligned}$$

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \cdot (16x + 32) = 0$$

$$\Leftrightarrow (16x + 32) = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad (e^{2x} \neq 0)$$

$$f'''(-2) = e^{-4} \cdot (-64 + 80) = 16 \cdot e^{-4} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$f(-2) = -4 \cdot e^{-4} \approx -0,073$$

W($-2 / \approx -0,073$)

Krümmungsverhalten:

$x < -2$, z.B. $x = -4$: $f''(-4) = -32 \cdot e^{-4} < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

$x > -2$, z.B. $x = 0$: $f''(0) = 32 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

für $x < -2$ ist f rechtsgekrümmt,

für $x > -2$ ist f linksgekrümmt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(4 + 4x) \cdot e^{2x}] = \infty$$

$\downarrow$
 ∞

$\downarrow$
 ∞

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(4 + 4x) \cdot e^{2x}] = 0$$

$\downarrow$
 $-\infty$

$\downarrow$
 0

(da die e-Funktion den Verlauf bestimmt)

$$f(x) = (2,5x^2 - 125) \cdot e^{0,4x-2}$$

Nullstellen:

$$(2,5x^2 - 125) \cdot e^{0,4x-2} = 0 \Leftrightarrow 2,5x^2 - 125 = 0 \vee e^{0,4x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 50 \vee e^{0,4x-2} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \vee x = -\sqrt{50}$$

$$\text{Nullstellen: } x = \sqrt{50} (\approx 7,07) \vee x = -\sqrt{50}$$

Extrema:

$$f'(x) = (5x) \cdot e^{0,4x-2} + (2,5x^2 - 125) \cdot (0,4) \cdot e^{0,4x-2} = e^{0,4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50)$$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow e^{0,4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{0,4x-2} = 0 \vee (x^2 + 5x - 50) = 0 \Leftrightarrow e^{0,4x-2} \neq 0 \vee x = 5 \vee x = -10$$

$$f''(x) = e^{0,4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50) \cdot (0,4) + e^{0,4x-2} \cdot (2x + 5) = (0,4x^2 + 4x - 15) \cdot e^{0,4x-2}$$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$:

$$f''(5) = 15 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(5) = -62,5$$

$$f''(-10) \approx -0,037 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(-10) \approx 0,31$$

$$\text{HP}(-10/0,31) \quad \text{TP}(5/-62,5)$$

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow (0,4x^2 + 4x - 15) \cdot e^{0,4x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{0,4x-2} = 0 \vee 0,4x^2 + 4x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{0,4x-2} \neq 0 \quad x \approx -12,9 \vee x \approx 2,9$$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$:

$$f'''(x) = (0,4x^2 + 4x - 15) \cdot 0,4 \cdot e^{0,4x-2} + (0,8x + 4) \cdot e^{0,4x-2} = (0,16x^2 + 2,4x + 2) \cdot e^{0,4x-2}$$

$$f'''(-12,9) \approx -55,02 \neq 0 \quad (\text{maximale Steigung}) \quad f(-12,9) \approx 0,23$$

$$f'''(2,9) \approx 0,45 \neq 0 \quad (\text{minimale Steigung}) \quad f(2,9) \approx -44,89$$

$$W_1(-12,9/\approx 0,23) \quad W_2(2,9/\approx -44,89)$$

Krümmungsverhalten:

$$x < -12,9, \quad \text{z.B. } x = -20: f'''(-20) \approx 0,003 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$-12,9 < x < 2,9, \quad \text{z.B. } x = 10: f'''(0) \approx -2,03 < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt}$$

$$x > 2,9, \quad \text{z.B. } x = 10: f'''(10) \approx 480,29 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$x < -12,9 \Rightarrow f \text{ ist linksgekrümmt}$$

$$-12,9 < x < 2,9 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt}$$

$$x > 2,9 \Rightarrow f \text{ ist linksgekrümmt}$$

Grenzverhalten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2,5x^2 - 125) \cdot e^{0,4x-2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2,5x^2 - 125) \cdot e^{0,4x-2} = 0$$