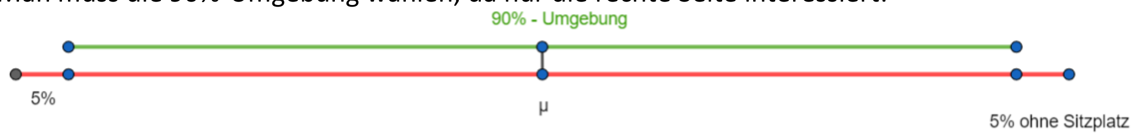
Lösungen zu den Übungen zu Sigmaregeln

Aufgabe	Lösung
1. Mit einem Würfel wird 200mal gewürfelt. X sei die Anzahl der gewürfelten Einsen. Geben Sie ein Intervall an, in dem ca. 99,7% aller Werte von X liegen.	Erwartungswert: $\mu = 200 \cdot \frac{1}{6} = \frac{100}{3} = 33,\overline{3}$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{250}{9}} \approx 5,27 > 3$ $[\mu - 3\,\sigma;\ \mu + 3\,\sigma] = [33,33 - 3 \cdot 5,27; 33,33 + 3 \cdot 5,27] = [17,52; 49,14]$ Wenn ein Würfel 200mal geworfen wird, würfelt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% zwischen 18 und 49 Einsen.
2. Mit einem Würfel wird 200mal gewürfelt. X sei die Anzahl der gewürfelten geraden Zahlen. Geben Sie ein Intervall an, in dem ca. 68,3% aller Werte von X liegen.	Erwartungswert: $\mu = 200 \cdot \frac{3}{6} = 100$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}} = \sqrt{50} \approx 7,07 > 3$ $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma] = [100 - 7,07; 100 + 7,07] = [92,93; 107,7]$ Wenn ein Würfel 200mal geworfen wird, würfelt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% zwischen 93 und 107 gerade Zahlen.
3. In einer Urne liegen 20 rote und 15 grüne Kugeln. Es wird 100mal gezogen und die Kugeln werden wieder zurückgelegt. X sei die Anzahl der gezogenen grünen Kugeln. Geben Sie ein Intervall an, in dem ca. 95,4% aller Werte von X liegen.	Erwartungswert: $\mu = 100 \cdot \frac{15}{35} = \frac{300}{7} = 42,86$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{15}{35} \cdot \frac{20}{35}} = \sqrt{\frac{1200}{49}} \approx 4,95 > 3$ $[\mu - 2\,\sigma;\ \mu + 2\,\sigma] = [42,86 - 2 \cdot 4,95; 42,86 + 2 \cdot 4,95] = [32,96; 52,76]$ Wenn 100mal eine Kugel gezogen wird, zieht man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% zwischen 33 und 52 grüne Kugeln.
4. Eine Fabrik liefert Surfbretter aus. Erfahrungsgemäß sind 2% aller Surfbretter fehlerhaft. a. Wie viele fehlerhafte Surfbretter sind bei einer Lieferung von 1000 Surfbrettern zu erwarten? b. Ein Händler möchte im Mittel mindestens 1500 fehlerfreie Surfbretter bestellen. Wie viele Surfbretter sollte er bestellen? c. In welchem Intervall liegt die Anzahl der fehlerhaften Surfbretter mit 99% Sicherheit, wenn 800 Surfbretter geliefert werden?	a. $1000 \cdot 0,02 = 20$ Es sind 20 fehlerhafte Bretter zu erwarten. b. $n \cdot 0,98 = 1500 \Leftrightarrow n = \frac{1500}{0,98} \approx 1530,61$ Er müsste mindestens 1531 Surfbretter bestellen. c. Erwartungswert: $\mu = 800 \cdot 0,02 = 16$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = \sqrt{15,68} \approx 3,96 > 3$ $[\mu - 2,58 \cdot \sigma;\ \mu + 2,58 \cdot \sigma] \approx [16 - 10,217; 16 + 10,217] = [5,783; 26,217]$ Mit einer Sicherheit von 99% werden zwischen 6 und 26 fehlerhafte Surfbretter ausgeliefert.

5. Der A380 verfügt über 555 Sitzplätze. Eine Fluggesellschaft hat 600 Plätze verkauft, da man eine Stornierungsrate von 10% erwarten kann. a. Wie viele Plätze müssten zur Verfügung stehen, damit nur 5% der Passagiere keinen Platz bekommen? b. Wie viele Plätze müssten zur Verfügung stehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% alle Passagiere einen Platz bekommen?	X: Anzahl der tatsächlich eincheckenden Passagiere Erwartungswert: $\mu = 600 \cdot 0{,}9 = 540$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{54} \approx 7{,}348 > 3$ a. Man muss die 90%-Umgebung wählen, da nur die rechte Seite interessiert:  $[\mu - 1{,}64 \cdot \sigma;\ \mu + 1{,}64 \cdot \sigma] \approx [540 - 112{,}051;\ 540 + 12{,}051] = [527{,}949;\ 552{,}05]$ Es müssten 553 Plätze zur Verfügung stehen. b. $[\mu - 2{,}58 \cdot \sigma;\ \mu + 2{,}58 \cdot \sigma] \approx [540 - 18{,}96;\ 540 + 18{,}96] = [521{,}04;\ 558{,}96]$ Es müssten ca. 559 Plätze zur Verfügung stehen, wenn man eine 99%-Wahrscheinlichkeit haben möchte, dies würde man mit 555 Sitzplätzen nicht erreichen.
6. Ein Losverkäufer verkauft Lose. Er behauptet, dass 30% aller Lose einen Gewinn beinhaltet. Eine Familie kauft 50 Lose, um diese Aussage zu testen. Darunter sind 7 Gewinne. a. Wie viele Gewinne kann die Familie erwarten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis? b. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass man 7 Gewinne erzielt? c. Überprüfen Sie die Aussage des Verkäufers mit der 3σ-Regel und formulieren Sie einen Antwortsatz.	a. X: Anzahl der Gewinne Erwartungswert: $\mu = 50 \cdot 0{,}3 = 15$ $B_{50;0,3}(15) \approx 0{,}1223$ Man kann mit 15 Gewinnen rechnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ca. 12,23%. b. $B_{50;0,3}(7) \approx 0{,}0048$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,48%. c. Standardabweichung $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{10{,}5} \approx 3{,}24 > 3$ Im 3σ-Intervall [5,28; 24,72] liegen ca. 99,7% der Werte. Das Testergebnis von 7 Gewinnen liegt in diesem Intervall. Nach der 3σ-Regel ist das Ergebnis von 7 Gewinnen zwar selten, liegt aber noch innerhalb der erwarteten Schwankungsbreite. Daher kann die Behauptung des Verkäufers mit den gegebenen Daten nicht widerlegt werden.
7. 28% der Deutschen über 65 Jahre besitzen ein Smartphone. X sei die Anzahl der Senioren, denen ein Smartphone gehört. Auf einer Veranstaltung sind 2000 Senioren zugegen. 600 Senioren behaupten, dass ein Smartphone besitzen. Bewerten Sie anhand der 3σ-Regel, ob diese Aussage glaubhaft ist.	Erwartungswert: $\mu = 2000 \cdot 0{,}28 = 560$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2000 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}72} = \sqrt{403{,}2} \approx 20{,}08 > 3$ 2σ-Intervall: [560− 60,24; 560 + 60,24] = [499,76; 620,24] Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 99,7% liegt die Anzahl der Senioren mit einem Smartphone auf dieser Veranstaltung zwischen 500 und 620. Die Behauptung, dass 600 Senioren ein Smartphone besitzen, ist somit glaubhaft.