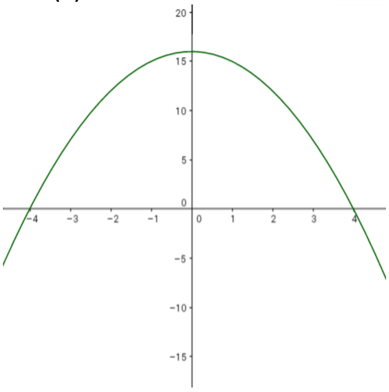
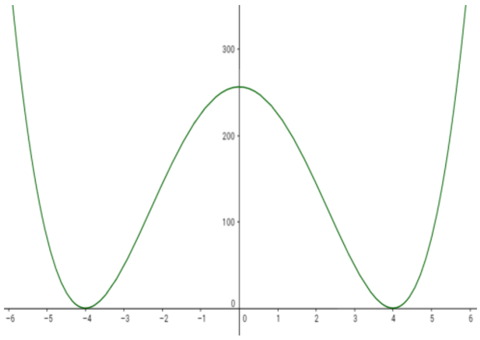
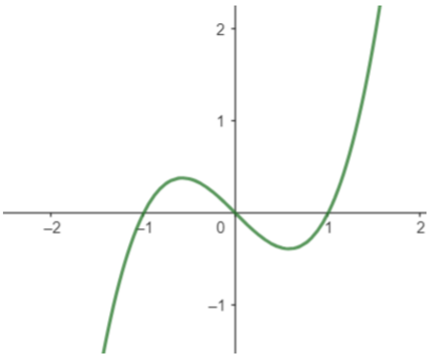
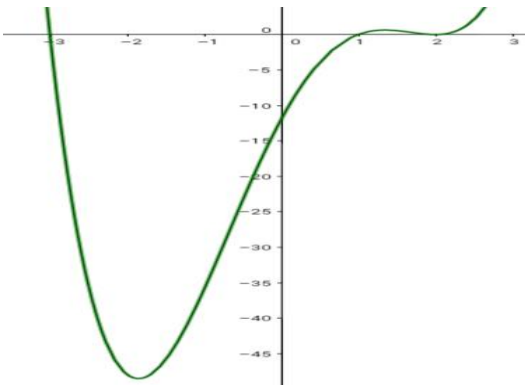
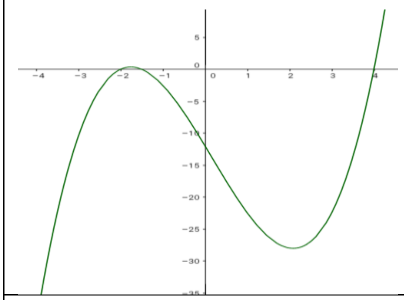
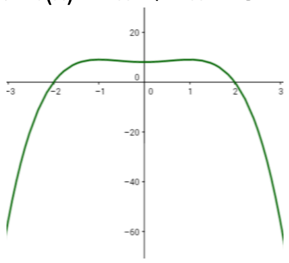
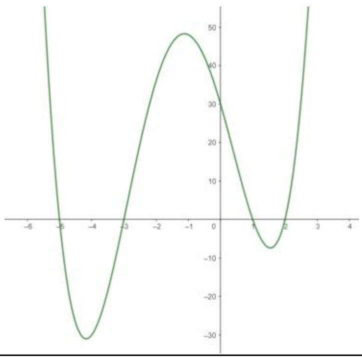
Lösung zur Übung von Flächen zwischen f(x) und der x-Achse

a. $f(x) = -x^2 + 16$ 	Nullstellen: $-x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$ Überprüfung, ob f(x) in dem Intervall positiv oder negativ ist (Alternativ kann man bei allen Aufgaben immer Betragsstriche bei jedem Integral setzen.) $f(0) = 16 > 0$ $\int_{-4}^{4} f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 16x\right]_{-4}^{4} = \frac{128}{3} - (-\frac{128}{3}) = \frac{256}{3} = 85,\overline{3}$
b. $f(x) = x^4 - 32x^2 + 256$ 	Nullstellen: $x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$ Überprüfung, ob f(x) in dem Intervall positiv oder negativ ist $f(0) = 256 > 0$ $\int_{-4}^{4} f(x)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 256x\right]_{-4}^{4} = \frac{8192}{15} - (-\frac{8192}{15}) = \frac{16384}{15}$ $= 1092,27$
c. $f(x) = x^3 - x$ 	Nullstellen: $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$ $\left\|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right\| + \left\|\int_{0}^{1} f(x)dx\right\|$ $= \left\|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right\| + \left\|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right\|$ $= \left\|\frac{1}{4}\right\| + \left\|-\frac{1}{4}\right\| = \frac{1}{2}$
d. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ 	Nullstellen: $X^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = 2$ Überprüfung, ob f(x) in dem Intervall positiv oder negativ ist $[-3;1]$: $f(0) = -12 < 0$ $[1;2]$: $f(1,5) = 0,5625 > 0$ $\left\|\int_{-3}^{1} f(x)dx\right\| + \int_{1}^{2} f(x)dx$ $= \left\|\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 10x^2 - 12x\right]_{-3}^{1}\right\| + \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 -$ $\frac{7}{3}x^3 + 10x^2 - 12x\right]_{1}^{2} = \|-104,5\overline{3}\| + 0,3\overline{6} = 104,5\overline{3} + 0,3\overline{6} =$ $104,9$

e. $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 11x - 12$ 	Nullstellen: $x^3 - 0{,}5x^2 - 11x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1{,}5 \vee x = 4$ $\left\|\int_{-2}^{-1,5} f(x)dx\right\| + \left\|\int_{-1,5}^{4} f(x)dx\right\|$ $= \left\|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 5{,}5x^2 - 12x\right]_{-2}^{-1,5}\right\| + \left\|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 5{,}5x^2 - 12x\right]_{-1,5}^{4}\right\|$ $\approx \|0{,}12\| + \|-90{,}12\| = 90{,}24$
f. $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$ 	Nullstellen: $-x^4 + 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$ $\left\|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right\| = \left\|\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2}\right\| = \left\|\frac{224}{15} - \left(-\frac{224}{15}\right)\right\|$ $= \frac{448}{15} = 29{,}8\overline{6}$
g. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$ 	Nullstellen: $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30 = 0$ $\Leftrightarrow x = -5 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 2$ $\left\|\int_{-5}^{-3} f(x)dx\right\| + \left\|\int_{-3}^{1} f(x)dx\right\| + \left\|\int_{1}^{2} f(x)dx\right\|$ $= \left\|\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{29}{2}x^2 + 30x\right]_{-5}^{-3}\right\| + \left\|\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{29}{2}x^2 + 30x\right]_{-3}^{1}\right\| + \left\|\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{29}{2}x^2 + 30x\right]_{1}^{2}\right\|$ $\approx \|-40{,}27\| + \|119{,}47\| + \|-4{,}88\| = 164{,}62$
2. Suchen Sie rechnerisch eine reelle Zahl $a > 2$, so dass die Fläche zwischen f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$ und der x-Achse im Intervall $[2;a]$ 18 Flächeneinheiten beträgt.	$\frac{1}{2}x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ $x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$ $\int_2^a f(x)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - x^2\right]_2^a = \frac{1}{8}a^4 - a^2 - (\frac{1}{8} \cdot 2^4 - 2^2)$ $= \frac{1}{8}a^3 - a^2 + 2$ $\frac{1}{8}a^3 - a^2 + 2 = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{8}a^3 - a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \vee a = 4$ Für a = 4 beträgt die Fläche 18.
3. Berechnen Sie, ob es eine reelle Zahl $a > 0$ gibt, so dass die Fläche zwischen f mit $f(x) = a^2x^2 - 4$ und der x-Achse im IV. Quadranten 8 Flächeneinheiten beträgt und geben Sie die Zahl gegebenenfalls an.	$a^2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{a}$ $A = \left\|\int_0^{2/a} f(x)dx\right\| = \left\|\left[\frac{a^2}{3}x^3 - 4x\right]_0^{2/a}\right\| = \left\|\frac{a^2}{3} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^3 - 4 \cdot \frac{2}{a} - 0\right\|$ $= \left\|\frac{8}{3a} - \frac{8}{a}\right\| = \left\|\frac{8}{3a} - \frac{24}{3a}\right\| = \left\|-\frac{16}{3a}\right\| = \frac{16}{3a}$ $\frac{16}{3a} = 8 \Leftrightarrow 3a = \frac{16}{8} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$ Für $a = \frac{2}{3}$ beträgt die gesuchte Fläche 8.