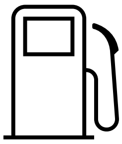
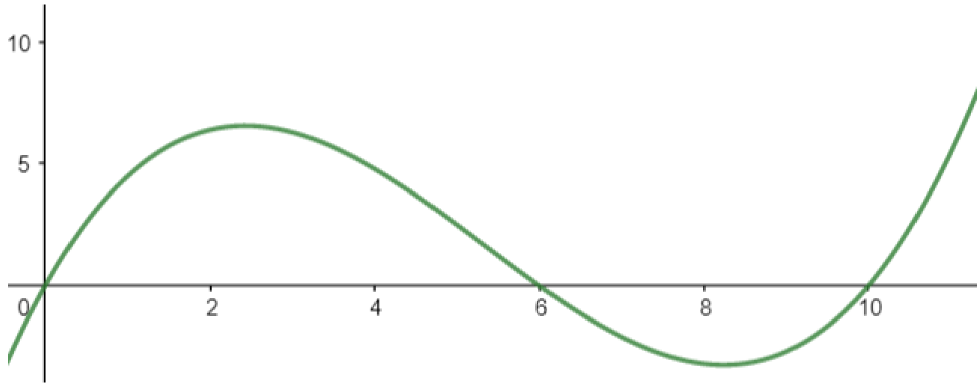
Einführung in die Rekonstruktion von Beständen



In einem Tank einer Tankstelle befinden sich 20.000l Benzin. An einem Tag kommt ein Tanklaster und liefert neues Benzin.
Der Zu/Abfluss kann durch die Funktion $f(x) = 0{,}1x^3 - \frac{8}{5}x^2 + 6x$ modelliert werden, x in Minuten mit $0 \leq x \leq 10$, f(x) in 100 l/min.



a. Berechnen Sie die Benzinmenge im Tank nach 5 Minuten.
b. Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g(t) auf, die die Benzinmenge im Tank zum Zeitpunkt t darstellt.
c. Überlegen Sie zuerst anhand des Graphen, zu welchem Zeitpunkt die Benzinmenge im Tank maximal ist, und bestimmen Sie den Wert anschließend rechnerisch.
d. Berechnen Sie, wann die Benzinmenge im Tank am stärksten steigt.
e. Bestimmen Sie anhand der Zeichnung, wann die Benzinmenge im Tank innerhalb des Beobachtungszeitraums am stärksten abfällt. Begründen Sie Ihre Meinung.

Lösung:

Man hat eigentlich die Ableitungsfunktion gegeben.
Also gibt F(x) die Menge Benzin an, die im Tank insgesamt dazugekommen ist. Aber Achtung: Es gibt verschiedene Stammfunktionen, daher ist der Startwert wichtig.

a. $\int_0^5 f(x)dx = \left[0{,}025x^4 - \frac{8}{15}x^3 + 3x^2\right]_0^5 \approx 23{,}9583$
23,9583 · 100 + 20.000 = 22.395,83
Nach 5 Minuten befinden sich ca. 22.395,83 l im Tank.

b. g(t) = 20.000 + 100 · $\int_0^t f(x)dx$, t in Minuten, g(t) in l
oder g(t) = 200 + $\int_0^t f(x)dx$, t in Minuten, g(t) in 100l

c. Überlegung:
f(x) > 0 für 0 < x < 6: von 0 bis 6 Minuten fließt Benzin dazu
f(x) < 0 für 6 < x < 10: von 6 bis 10 Minuten fließt Benzin ab

Berechnung:
f(x) = 0 ⇔ x = 0 v x = 6 v x = 10
Untersuchung auf VZW:
f(−1)= −7,7 und f(2) = 6,4 und f(8) = −3,2 und f(11) = 5,5
x = 0: VZW von – nach +: TP
x = 6: VZW von + nach –: HP
x = 10: VZW von – nach +: TP
Nach 6 Minuten ist die Benzinmenge im Tank am größten.

d. Gesucht: Maximum von f(x):
f'(x) = 0,3x²−3,2x + 6 = 0 ⇔ x ≈2,43 v x ≈ 8,24
f''(x) = 0,6x −3,2
f''(2,43) ≈ −1,74 < 0 => Maximum
f''(8,24) ≈ 1,34 < 0 => Minimum
Nach 2,43 Minuten steigt die Benzinmenge am stärksten an.

e. Gesucht: Minimum von f(x):
Dies liegt ungefähr bei 8,2. Da die Funktion in den Rändern steigt, ist dies auch das absolute Minimum.
Nach ca. 8,2 Minuten fällt die Benzinmenge am stärksten.