

Lösungen zu den Textaufgaben mit Ableitung und Integralen: Rekonstruktion von Beständen

Denken Sie daran, dass f die momentane Änderungsrate ist, also eigentlich die Ableitung f' !

Aufgabe 1: $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 15t^2 + 200t$

a. $f(10) = 833,33$

Nach 10 Tagen steigert sich die Ansteckungsrate auf ca. 833 Menschen/Tag.

b. $g(t) = \int_0^t f(x)dx + 500$, $g(20) = \int_0^{20} f(x)dx + 500 = \left[\frac{1}{12}x^4 - 5x^3 + 100x^2 \right]_0^{20} + 500$
 $= 13.333,3 + 500 \approx 13.833,3$

Nach 20 Tagen haben sich 13.833 Menschen angesteckt.

c. Gesucht: Maximum von f :

$$f'(t) = t^2 - 30t + 200 \quad \text{und} \quad f''(t) = 2t - 30$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$$

$$f''(10) = -10 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(10) = 833 \text{ s.o.}$$

$$f''(20) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } f(0) = 0 \text{ und } f(24) = 768$$

Nach 10 Tagen infizieren sich die meisten Menschen, nämlich 833.

d. Gesucht: die Tangente an f im Punkt $P(24/f(24))$:

$$f(24) = 768 \quad m = f'(24) = 56 \Rightarrow g(t) = 56t + b$$

$$\text{Einsetzen von P: } 768 = 56 \cdot 24 + b \Rightarrow b = -576$$

$$\Rightarrow g(t) = 56t - 576$$

$$822 = 56t - 576 \Leftrightarrow t = 24,96$$

Nach ca. 25 Tagen stecken sich 822 Menschen neu an.

Aufgabe 2: $f(x) = 0,1x^4 - 2x^3 + 9,6x^2$

a. $\int_0^5 f(x)dx = [0,02x^5 - 0,5x^4 + 3,2x^3]_0^5 = 150$

$$150 \cdot 10 + 20.000 = 21.500$$

Nach 5 Minuten befinden sich 21.500 l im Tank.

b. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Benzinmenge im Tank maximal ist!

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8 \vee x = 12$$

$$f(x) > 0 \text{ für } 0 < x < 8: \text{ in den ersten 8 Minuten fließt mehr dazu}$$

$$f(x) < 0 \text{ für } 8 < x < 12: \text{ von 8 bis 12 Minuten fließt mehr ab als zu}$$

Nach 8 Minuten ist die Benzinmenge im Tank am größten.

c. Gesucht: Maximum von $f(x)$:

$$f'(x) = 0,4x^3 - 6x^2 + 19,2x = 0 \Leftrightarrow x \approx 4,63 \vee x \approx 10,37$$

$$f''(x) = 1,2x^2 - 12x + 19,2$$

$$f''(4,63) \approx -10,64 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(4,63) \approx 53,24$$

$$f''(10,37) \approx 23,8 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$[\text{Ränder: } f(0) = 0 \text{ und } f(12) = 0]$$

Nach 4,63 Minuten steigt die Benzinmenge mit 532,4 l/min am stärksten an.

Aufgabe 3: $f(x) = x^4 - 14x^3 - 19x^2 + 476x + 480$

a. $f(7) = 480$

Nach 7 Tagen steigert sich die Rate der Menschen, die eine twitter-Nachricht erhalten, auf 480/Tag.

- b. Gesucht: Maximum der Stammfunktion F:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1 \vee x = 8 \vee x = 12$$

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476$$

$$f'(8) = -468 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$[f'(12) = 884 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}]$$

$F(x) = \int_0^x f(t)dt + 1000 = 0,2x^5 - 3,5x^4 - \frac{19}{3}x^3 + 238x^2 + 480x + 1000$ gibt die Anzahl der Menschen an, die die Nachricht auf ihren Geräten hat.

$$F(8) = 9046,93$$

Untersuchung der Ränder: $F(0) = 1000$, $F(12,5) = 7403,65$

Nach 8 Tagen haben die meisten Menschen diese Nachricht erhalten, es sind dann 9046 Menschen.

- c. Gesucht: Minimum von f:

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476 \text{ und } f''(x) = 12x^2 - 84x - 38$$

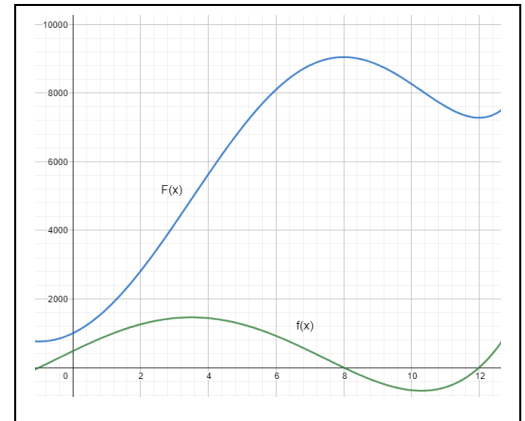
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -3,3 \vee x = 3,5 \vee x \approx 10,3$$

$$f''(3,5) = -185 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f''(10,3) = 369,88 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(10,3) = -676$$

Untersuchung der Ränder: $f(0) = 480$ und $f(14) = 3420$

Nach 10,3 Tagen müssen neue Nachrichten produziert werden.



Aufgabe 4: $f(x) = -0,01 \cdot x \cdot (x-6) \cdot (x-10) = -0,01x^3 + 0,16x^2 - 0,6x$

- a. $]0; 6[$: Wasser fließt ab (da $f(x) < 0$)

$]6; 10[$: Wasser fließt zu

ab 10: Wasser fließt ab

- b. Gesucht: Maximum von f:

$$f'(x) = -0,03x^2 + 0,32x - 0,6 \text{ und } f''(x) = -0,06x + 0,32$$

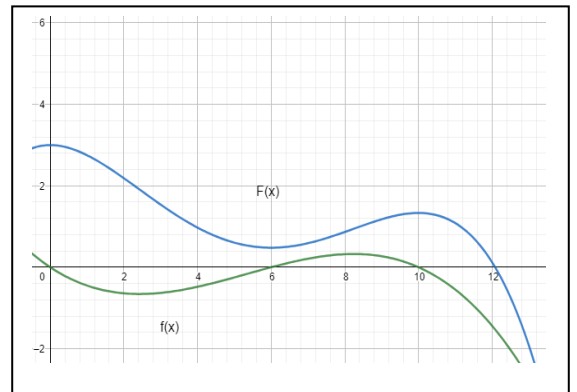
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 2,43 \vee x \approx 8,24$$

$$f''(2,43) \approx 0,174 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(8,24) \approx -0,174 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(8,24) \approx 0,325$$

Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$ und $f(10,5) \approx -0,236$

Die Wassermenge steigt nach 8,24 Tagen am stärksten.



- c. Gesucht: Minimum der Stammfunktion F:

Die geringste/höchste Wasserstandshöhe ist bei den Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10$$

Da $f(x) < 0$ für $x < 6$ und $f(x) > 0$ für $x > 6$ handelt es sich bei $x = 6$ um ein Minimum

(VZW von $-$ nach $+$)

Alternativ: $f'(6)$ und $f'(10)$ ausrechnen.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + 3 = -0,0025x^4 + \frac{0,16}{3}x^3 - 0,3x^2 + 3; F(6) = 0,48$$

Untersuchung der Ränder: $F(0) = 2$, $F(10,5) \approx 1,27$

Nach 6 Monaten ist der Wasserstand mit 0,48m am niedrigsten.

- d. $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} F(x)dx$

$$= \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (-0,0025x^4 + \frac{0,16}{3}x^3 - 0,3x^2 + 3)dx = \frac{1}{10} \cdot \left[-0,0005x^5 + \frac{0,04}{3}x^4 - 0,1x^3 + 3x \right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 13,33 \approx 1,33$$

Der See ist in den ersten 10 Tagen im Durchschnitt 1,33m tief.

