

## Lösungen zu den Textaufgaben mit Ableitung und Integralen: Rekonstruktion von Beständen

Denken Sie daran, dass  $f$  die momentane Änderungsrate ist, also eigentlich die Ableitung  $f'$ !

### Aufgabe 1: $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 15t^2 + 200t$

a.  $f(10) = 833,33$

Nach 10 Tagen steigt sich die Ansteckungsrate auf ca. 833 Menschen/Tag.

b.  $g(t) = \int_0^t f(x)dx + 500, g(20) = \int_0^{20} f(x)dx + 500 = \left[ \frac{1}{12}x^4 - 5x^3 + 100x^2 \right]_0^{20} + 500$   
 $= 13.333,3 + 500 \approx 13.833,3$

Nach 20 Tagen haben sich 13.833 Menschen angesteckt.

c. Gesucht: Maximum von  $f$ :

$$f'(t) = t^2 - 30t + 200 \quad \text{und} \quad f''(t) = 2t - 30$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$$

$$f''(10) = -10 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(10) = 833 \text{ s.o.}$$

$$f''(20) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Untersuchung der Ränder:  $f(0) = 0$  und  $f(24) = 768$

Nach 10 Tagen infizieren sich die meisten Menschen, nämlich 833.

d. Gesucht: die Tangente an  $f$  im Punkt  $P(24/f(24))$ :

$$f(24) = 768 \quad m = f'(24) = 56 \Rightarrow g(t) = 56t + b$$

$$\text{Einsetzen von } P: 768 = 56 \cdot 24 + b \Rightarrow b = -576$$

$$\Rightarrow g(t) = 56t - 576$$

$$822 = 56t - 576 \Leftrightarrow t = 24,96$$

Nach ca. 25 Tagen stecken sich 822 Menschen neu an.

### Aufgabe 2: $f(x) = 0,1x^4 - 2x^3 + 9,6x^2$

a.  $\int_0^5 f(x)dx = [0,02x^5 - 0,5x^4 + 3,2x^3]_0^5 = 150$

$$150 \cdot 10 + 20.000 = 21.500$$

Nach 5 Minuten befinden sich 21.500 l im Tank.

b. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Benzinmenge im Tank maximal ist!

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8 \vee x = 12$$

$f(x) > 0$  für  $0 < x < 8$ : in den ersten 8 Minuten fließt mehr dazu

$f(x) < 0$  für  $8 < x < 12$ : von 8 bis 12 Minuten fließt mehr ab als zu

Nach 8 Minuten ist die Benzinmenge im Tank am größten.

c. Gesucht: Maximum von  $f(x)$ :

$$f'(x) = 0,4x^3 - 6x^2 + 19,2x = 0 \Leftrightarrow x \approx 4,63 \vee x \approx 10,37$$

$$f''(x) = 1,2x^2 - 12x + 19,2$$

$$f''(4,63) \approx -10,64 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(4,63) \approx 53,24$$

$$f''(10,37) \approx 23,8 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

[Ränder:  $f(0) = 0$  und  $f(12) = 0$ ]

Nach 4,63 Minuten steigt die Benzinmenge mit 532,4 l/min am stärksten an.

### Aufgabe 3: $f(x) = x^4 - 14x^3 - 19x^2 + 476x + 480$

a.  $f(7) = 480$

Nach 7 Tagen steigt sich die Rate der Menschen, die eine twitter-Nachricht erhalten, auf 480/Tag.

b. Gesucht: Maximum der Stammfunktion  $F$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1 \vee x = 8 \vee x = 12$$

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476$$

$$f'(8) = -468 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$[f'(12) = 884 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}]$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + 1000 = 0,2x^5 - 3,5x^4 - \frac{19}{3}x^3 + 238x^2 + 480x + 1000 \text{ gibt die Anzahl der}$$

Menschen an, die die Nachricht auf ihren Geräten hat.

$$F(8) = 9046,93$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } F(0) = 1000, F(12,5) = 7403,65$$

Nach 8 Tagen haben die meisten Menschen diese Nachricht erhalten, es sind dann 9046 Menschen.

c. Gesucht: Minimum von  $f$ :

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476 \text{ und } f''(x) = 12x^2 - 84x - 38$$

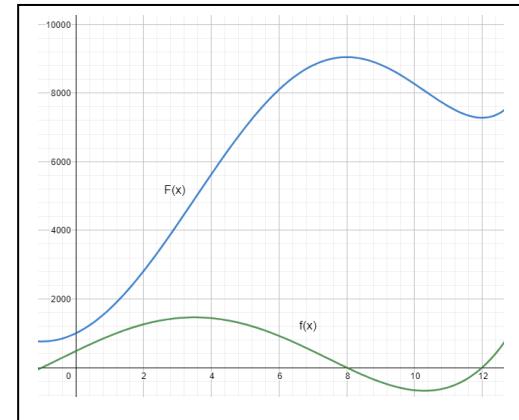
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -3,3 \vee x = 3,5 \vee x \approx 10,3$$

$$f''(3,5) = -185 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f''(10,3) = 369,88 > 0 \Rightarrow \text{Minimum } f(10,3) = -676$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } f(0) = 480 \text{ und } f(14) = 3420$$

Nach 10,3 Tagen müssen neue Nachrichten produziert werden.



#### Aufgabe 4: $f(x) = -0,01 \cdot x \cdot (x-6) \cdot (x-10) = -0,01x^3 + 0,16x^2 - 0,6x$

a.  $]0; 6[$ : Wasser fließt ab (da  $f(x) < 0$ )

$]6; 10[$ : Wasser fließt zu  
ab 10: Wasser fließt ab

b. Gesucht: Maximum von  $f$ :

$$f'(x) = -0,03x^2 + 0,32x - 0,6 \text{ und } f''(x) = -0,06x + 0,32$$

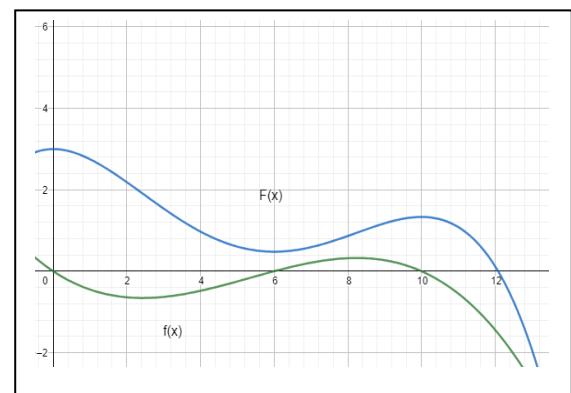
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 2,43 \vee x \approx 8,24$$

$$f''(2,43) \approx 0,174 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(8,24) \approx -0,174 < 0 \Rightarrow \text{Maximum } f(8,24) \approx 0,325$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } f(0) = 0 \text{ und } f(10,5) \approx -0,236$$

Die Wassermenge steigt nach 8,24 Tagen am stärksten.



c. Gesucht: Minimum der Stammfunktion  $F$ :

Die geringste/höchste Wasserstandshöhe ist bei den Nullstellen von  $f$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10$$

Da  $f(x) < 0$  für  $x < 6$  und  $f(x) > 0$  für  $x > 6$  handelt es sich bei  $x = 6$  um ein Minimum

(VZW von - nach +)

Alternativ:  $f'(6)$  und  $f'(10)$  ausrechnen.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + 3 = -0,0025x^4 + \frac{0,16}{3}x^3 - 0,3x^2 + 3; F(6) = 0,48$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } F(0) = 2, F(10,5) \approx 1,27$$

Nach 6 Monaten ist der Wasserstand mit 0,48m am niedrigsten.

$$d. \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} F(x) dx$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} \left( -0,0025x^4 + \frac{0,16}{3}x^3 - 0,3x^2 + 3 \right) dx = \frac{1}{10} \cdot \left[ -0,0005x^5 + \frac{0,04}{3}x^4 - 0,1x^3 + 3x \right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 13,33 \approx 1,33$$

Der See ist in den ersten 10 Tagen im Durchschnitt 1,33m tief.

