

Einführung Lage von Geraden und Ebenen in Parameterform:

1. Die Gerade g schneidet die Ebene E:

Gegeben sind E: $4x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ d.h. } \begin{aligned} x_1 &= 4 + 2t \\ x_2 &= 6 + 4t \\ x_3 &= 2 + 6t \end{aligned}$$

Dies setzt man in die Ebenengleichung E: $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 0$ ein:

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (4 + 2t) + 2 \cdot (6 + 4t) + 12 \cdot (2 + 6t) = 0$$

$$16 + 8t + 12 + 8t + 24 + 36t = 0 \Leftrightarrow 52 + 52t = 0 \Leftrightarrow 52t = -52 \Leftrightarrow t = -1$$

Nun berechnet man den Durchstoßpunkt, indem man den Wert von t in die Geradengleichung einsetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Die Gerade durchstößt die Ebene in } D(2/2/-4).$$

2. E und g sind parallel:

Gegeben ist E: $x_1 + 2,5x_2 - 2x_3 = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ d.h. } \begin{aligned} x_1 &= 4 + 2t \\ x_2 &= 6 + 4t \\ x_3 &= 2 + 6t \end{aligned}$$

Dies setzt man in die Ebenengleichung E: $x_1 + 2,5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ ein:

$$x_1 + 2,5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow (4 + 2t) + 2,5 \cdot (6 + 4t) - 2 \cdot (2 + 6t) = 0$$

$$4 + 2t + 15 + 10t - 4 - 12t = 0 \Leftrightarrow 15 = 0 \text{ Widerspruch} \Rightarrow E \text{ und } g \text{ sind parallel}$$

3. g liegt in E:

Gegeben ist E: $x_1 + 2,5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ d.h. } \begin{aligned} x_1 &= 4 + 2t \\ x_2 &= 6 + 4t \\ x_3 &= 9,5 + 6t \end{aligned}$$

Dies setzt man in die Ebenengleichung E: $x_1 + 2,5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$ ein:

$$x_1 + 2,5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow (4 + 2t) + 2,5 \cdot (6 + 4t) - 2 \cdot (9,5 + 6t) = 0$$

$$4 + 2t + 15 + 10t - 19 - 12t = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ allgemeingültig} \Rightarrow g \text{ liegt in } E$$