Lösung zu der Textaufgabe zu $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$

1. Die Entwicklung der Verkaufszahlen einer neuen Schokoladensorte in den ersten zwei Jahren wird durch die Funktion f mit f(x) = $\sqrt{x}$ modelliert, mit $0 \leq x \leq 24$ in Monaten und f(x) in Millionen verkauften Schokoladen pro Monat.

a. Berechnen Sie, wann 4,5 Millionen Schokoladen pro Monat verkauft werden.

$f(x) = 4{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4{,}5 \Leftrightarrow x = 4{,}5^2 = 20{,}25$

Nach 20,25 Monaten werden 4,5 Millionen Schokoladen pro Monat verkauft.

b. Berechnen Sie, wie viele Schokoladen pro Monat nach einem Jahr verkauft werden.

$f(12) = \sqrt{12} \approx 3{,}4641$

Nach einem Jahr werden ca. 3.464.100 Schokoladen pro Monat verkauft.

c. Berechnen Sie f'(5) und geben Sie an, was der Wert im Sachzusammenhang bedeutet.

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ $\quad f'(5) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \approx 0{,}223607$

Nach 5 Monaten steigt die Anzahl der verkauften Schokoladen um 223.607 pro Monat.

d. Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate zwischen dem ersten und dem zweiten Jahr und geben Sie an, was der Wert im Sachzusammenhang bedeutet.

$\frac{f(24)-f(12)}{24-12} = \frac{\sqrt{24}-\sqrt{12}}{12} \approx 0{,}119573$

Zwischen dem ersten und dem zweiten Jahr steigt die Anzahl der verkauften Schokoladen um durchschnittlich ca. 119.573 Schokoladen pro Monate.

e. Berechnen Sie, wie viele Schokoladen nach einem Jahr verkauft worden sind.

$\int_0^{12} f(x)dx = \int_0^{12} x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12} = 27{,}71$

Nach einem Jahr sind ca. 27,71 Mio. Schokoladen verkauft worden.

f. Nach 24 Monaten ändern sich die Verkaufszahlen und werden in den nächsten darauffolgenden 12 Monaten durch die Funktion g(x) = $-\sqrt{x-a} + 10$ modelliert, $a \in \mathbb{R}$ mit $a \leq 24$. Bestimmen Sie a so, dass nach 24 Monaten 4 Millionen Schokoladen verkauft werden. Erklären Sie anschließend, wie der Graph der Funktion g durch Veränderungen des Graphen der Funktion f entstanden ist.

$g(24) = 4 \Leftrightarrow -\sqrt{24-a} + 10 = 4 \Leftrightarrow -\sqrt{24-a} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{24-a} = 6 \Leftrightarrow 24 - a = 36$

$\Leftrightarrow a = -12$

$g(x) = -\sqrt{x+12} + 10$

Die Funktion g entsteht durch eine Verschiebung um 12 nach links, sowie einer Spiegelung an der x-Achse und anschließend durch eine Verschiebung um 10 nach oben.

2. Ein Unternehmen bietet einen Lieferdienst an und berechnet die Lieferkosten basierend auf der Entfernung x zwischen dem Lagerhaus und dem Kunden. Die Kosten pro Lieferung werden durch die Funktion f(x) = $-\frac{8}{x+3}+5$ beschrieben, f(x) in Euro, x in km.

   a. Berechnen Sie die Lieferkosten, wenn die Entfernung zum Kunden 7 km beträgt.

      f(7) = 4,2

      Der Kunde muss 4,2 € bezahlen.

   b. Bei welcher Entfernung entstehen Kosten von 4€?

      $-\frac{8}{x+3}+5 = 4 \Leftrightarrow -\frac{8}{x+3}+5 = 4 \Leftrightarrow \frac{8}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 8 = x + 3 \Leftrightarrow x = 5$

      Nach 5 km entstehen Kosten von 4€.

   c. Was lässt sich über die Kosten sagen, wenn die Entfernung immer größer wird? Interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

      $$\lim_{x\to\infty}\left(-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{8}{x+3}}+5\right) = 5$$

      Die Preise nähern sich immer mehr 5€ an.

   d. Berechnen Sie f'(6) und geben Sie an, was der Wert im Sachzusammenhang bedeutet.

      f(x) = $-8\cdot(x+3)^{-1}+5$

      f'(x) = $-8\cdot(-1)\cdot(x+3)^{-2} = \frac{8}{(x+3)^2}$ f'(6) $\approx$ 0,1

      Nach 6 Monaten steigen die Kosten um ca. 10 Cent pro km.

   e. Eine zweite Firma berechnet die Lieferkosten folgendermaßen: Die Kosten pro Lieferung werden durch die Funktion f(x) = $\frac{1}{x}+4$ beschrieben, f(x) in Euro, x > 0 in km. Berechnen Sie, ab wieviel km es billiger ist, diese Firma zu beauftragen.

$-\frac{8}{x+3}+5 = \frac{1}{x}+4 \Leftrightarrow -\frac{8}{x+3}+1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{-8+x+3}{x+3} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{-5+x}{x+3} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (-5+x)\cdot x = x + 3$

$\Leftrightarrow\ -5x + x^2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3} \Leftrightarrow x_1 \approx -0{,}46 \vee x_2 \approx 6{,}46$

<u>Nach 6,46 km ist die zweite Firma billiger.</u>